



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Classificazione di fibrati vettoriali complessi

Relatore:

Prof. Filippo Callegaro

Candidato:

Leonardo Migliorini

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Indice

Introduzione	2
1 Nozioni preliminari	3
1.1 Varietà e fibrati	3
1.2 Operazioni tra fibrati vettoriali	7
1.3 Forme differenziali	8
1.4 Coomologia di de Rham	12
2 Il complesso di Čech-de Rham	15
2.1 Il principio di Mayer-Vietoris	15
2.2 La classe di Eulero di un fibrato in sfere	23
2.3 La classe di Eulero di un fibrato vettoriale orientato di rango 2	26
2.4 Coomologia di Čech a coefficienti in un prefascio	29
2.5 L'isomorfismo di Thom	31
3 Classi di Chern	35
3.1 Definizione delle classi di Chern	35
3.2 Principio di Spezzamento	38
3.3 Varietà delle bandiere	42
4 Il Fibrato Universale	46
4.1 La coomologia della Grassmanniana	46
4.2 Classificazione di fibrati vettoriali	49

Introduzione

Un fibrato vettoriale è un oggetto geometrico ottenuto "incollando" delle copie di uno spazio vettoriale reale o complesso V , in modo che lo spazio risultante sia localmente un prodotto $U \times V$. Possiamo pensare a un fibrato vettoriale come a una famiglia di spazi isomorfi a V parametrizzati in modo continuo da uno spazio B , detto *base* del fibrato.

In questa tesi affrontiamo il problema della classificazione dei fibrati vettoriali nella categoria delle varietà lisce, specializzandoci al caso di fibrati vettoriali complessi. Per fare questo seguiamo due approcci differenti. Costruiamo inizialmente degli invarianti algebrici, nello specifico delle classi di coomologia, che dipendono dalla classe di isomorfismo del fibrato, usando la teoria di de Rham come teoria coomologica. In seguito vediamo come tutti i fibrati vettoriali complessi su una varietà M possono essere ottenuti a partire da uno "spazio classificante", e diamo in questi termini un teorema di classificazione.

Nel Capitolo 1 introduciamo le nozioni di base riguardanti gli oggetti matematici che verranno studiati nel seguito. Diamo le definizioni di varietà liscia e di fibrato, concentrandoci principalmente sui fibrati vettoriali. Richiamiamo inoltre i principi della teoria di de Rham.

Nel Capitolo 2 generalizziamo la coomologia delle forme differenziali tramite il complesso di Čech-de Rham. Questa costruzione risulta utile al fine della calcolabilità della teoria di de Rham, permettendo di determinare la coomologia di una varietà a partire da informazioni locali. Definiamo inoltre la classe di Eulero di un fibrato vettoriale orientato e ne vediamo le proprietà più importanti.

I Capitoli 3 e 4 sono dedicati allo studio dei fibrati vettoriali complessi. Nel Capitolo 3 diamo una costruzione delle classi di Chern, delle classi di coomologia associate in modo funtoriale a un fibrato vettoriale complesso, e vediamo alcune proprietà. Nel Capitolo 4 introduciamo la Grassmanniana complessa. Questa ricopre un ruolo fondamentale nella classificazione. Ne calcoliamo la coomologia in termini delle classi di Chern di opportuni fibrati e usiamo questo risultato per mostrare che le classi di Chern sono l'invariante coomologico più generale associato a un fibrato vettoriale complesso.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo primo capitolo introduciamo il concetto di fibrato e la coomologia di de Rham di una varietà liscia, enunciandone le proprietà principali. I riferimenti usati per la trattazione delle varietà e dei fibrati sono [Con93, Cap. 1], [Hus94, Cap. 2, 3] e [BT82, § 6], per le forme differenziali e la coomologia di de Rham [BT82, § 1-5].

1.1 Varietà e fibrati

Definizione 1.1. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico M di Hausdorff a base numerabile per cui ogni punto ammette un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n . Una coppia (U, ϕ) dove U è un aperto di M e $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un omeomorfismo si dice *carta locale*. Un insieme di carte locali che ricoprono la varietà si dice *atlante*.

Se (U, ϕ) è una carta locale, possiamo scrivere $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ e pensare a x_1, \dots, x_n come a coordinate indotte su U tramite ϕ .

Definizione 1.2. Sia M una varietà topologica di dimensione n e sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto con omeomorfismi $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diciamo che M è una *varietà liscia* se le *funzioni di transizione*

$$g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n per ogni $\alpha \neq \beta$.

Definizione 1.3. Siano M, N due varietà lisce. Una funzione $f : M \rightarrow N$ è *liscia* se per ogni punto $p \in M$ esistono una carta (U, ϕ) di M e una carta (V, ψ) di N tali che $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ e la funzione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

è liscia.

Nel seguito useremo il termine *varietà* per indicare sempre una *varietà liscia*. Le mappe tra varietà, se non specificato diversamente, saranno sempre mappe lisce.

Definizione 1.4. Sia M una varietà di dimensione n . Un *buon ricoprimento* di M è un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ per cui tutte le intersezioni finite $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ sono diffeomorfe a \mathbb{R}^n . Una varietà che ammette un buon ricoprimento finito si dice *di tipo finito*.

Vale che ogni varietà ammette un buon ricoprimento ([BT82, Teorema 5.1]) e che ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento che sia un buon ricoprimento. Possiamo quindi studiare le proprietà locali di una varietà supponendo di avere a disposizione un buon ricoprimento. Questo sarà particolarmente utile nel Capitolo 2, quando discuteremo il complesso di Čech-de Rham.

Definizione 1.5. Una varietà M è *orientabile* se ammette un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ che preservano le orientazioni locali, cioè che hanno determinante Jacobiano positivo. Un tale atlante si dice *orientato*.

Diciamo che due atlanti \mathcal{A} e \mathcal{A}' *determinano la stessa orientazione* sulla varietà M se la loro unione è un atlante orientato.

Definizione 1.6. Siano M una varietà di dimensione n , p un punto di M e (U, ϕ) una carta locale tale che $p \in U$. Lo *spazio tangente* a M in p è lo spazio vettoriale reale $T_p M$ avente per base gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$$

dove x_1, \dots, x_n sono le coordinate su U indotte da ϕ . Una mappa liscia $f : M \rightarrow N$ tra varietà induce per composizione una mappa sugli spazi tangenti

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

per ogni p in M , detta *differenziale* di f in p .

Ricordiamo che una varietà è uno spazio paracompatto (una dimostrazione di questo fatto viene data in [Con93, Teorema 1.4.9]). Il seguente risultato, che viene dimostrato in [Con93, Teorema 3.5.4], è molto utile per estendere alla varietà alcune costruzioni locali. Lo useremo ad esempio nella definizione di integrale di una forma differenziale o per dotare una varietà di una metrica Riemanniana.

Teorema 1.7. Siano M una varietà e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto. Esiste una *partizione dell'unità relativa a tale ricoprimento*, cioè una famiglia di mappe lisce non negative $\rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

- (i) ogni punto di M ammette un intorno su cui le ρ_α sono nulle a meno di un numero finito;
- (ii) per ogni punto p di M vale $\sum \rho_\alpha(p) = 1$;
- (iii) il supporto di ρ_α è contenuto in U_α per ogni α .

Definizione 1.8. Sia G un gruppo topologico che agisce in modo fedele a sinistra su uno spazio topologico F . Una mappa continua e surgettiva $\pi : E \rightarrow B$ tra spazi topologici è un *fibrato con fibra F e gruppo di struttura G* se B ammette un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ con omeomorfismi

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times F$$

tali che $\phi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times F$ per ogni p in M e per cui le *funzioni di transizione*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G, \quad g_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} |_{\{x\} \times F}$$

sono funzioni continue. Lo spazio E si dice *spazio totale*, mentre B si dice *spazio base*. Diciamo che $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ è una *trivializzazione* del fibrato.

Nel seguito considereremo sempre dei fibrati in cui lo spazio base e la fibra sono entrambe varietà. Una trivializzazione del fibrato induce in modo naturale una struttura di varietà sullo spazio totale, che rende la proiezione π una mappa liscia. A meno che non venga specificato il gruppo di struttura sarà sempre il gruppo dei diffeomorfismi della fibra. Se $\pi : E \rightarrow B$ è un fibrato poniamo $E|_U = \pi^{-1}U$ e $E_p = \pi^{-1}(p)$ per $U \subseteq M$, $p \in M$.

Consideriamo un fibrato $\pi : E \rightarrow M$ su una varietà M con fibra F e trivializzazione $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$. Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ rispettano la *condizione di cociclo*, cioè per ogni α, β, γ vale $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma}$. Viceversa, consideriamo una famiglia di funzioni $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$ a valori in G che rispettano la condizione di cociclo. Possiamo costruire un fibrato E con fibra F e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ definendo

$$E = \left(\bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times F \right) / \sim$$

dove la classe di equivalenza di $(x, y) \in U_\beta \times F$ è costituita dai punti del tipo $(x, g_{\alpha\beta}(x)y)$ al variare di $\beta \neq \alpha$. Quindi possiamo indicare un fibrato anche solo specificandone lo spazio totale, la fibra e le funzioni di transizione. Questo corrisponde all'idea di ottenere E "incollando" gli spazi topologici $U_\alpha \times F$ tramite le funzioni di transizione.

Consideriamo adesso un *fibrato vettoriale reale* $\pi : E \rightarrow M$ di rango n , cioè un fibrato avente fibra \mathbb{R}^n e tale che le trivializzazioni $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ si restringono a isomorfismi lineari su ogni fibra. Le funzioni di transizione hanno valori in $GL_n(\mathbb{R})$, che è il gruppo di struttura del fibrato. Analogamente possiamo considerare un *fibrato vettoriale complesso*, cioè un fibrato con fibra \mathbb{C}^n e gruppo di struttura $GL_n(\mathbb{C})$. In questo capitolo e nel prossimo considereremo sempre fibrati vettoriali reali, se non specificato diversamente, ma molte proprietà si adattano facilmente al caso complesso.

Definizione 1.9. Siano $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M$ due fibrati. Una mappa $f : E \rightarrow E'$ è un *omomorfismo di fibrati* se fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

cioè se f preserva le fibre. Un omomorfismo di fibrati bigettivo la cui inversa sia un omomorfismo di fibrati è un *isomorfismo*. Nel caso in cui E ed E' siano fibrati vettoriali richiediamo anche che f si restringa a un omomorfismo di spazi vettoriali su ogni fibra.

Definizione 1.10. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato e $U \subseteq M$ un aperto. Una *sezione* del fibrato su U è una mappa $s : U \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = id_U$. Nel caso in cui π sia un fibrato vettoriale esiste una sezione globale $M \rightarrow E$ che a ogni punto associa lo zero della fibra corrispondente, detta *sezione nulla*. Un insieme di sezioni $\{s_1, \dots, s_n\}$ su un aperto U è un *frame* se per ogni punto $p \in U$ i vettori $s_1(p), \dots, s_n(p)$ formano una base della fibra E_p .

Osservazione 1.11. L'esistenza di un frame globale $\{s_1, \dots, s_n\}$ per un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ induce un isomorfismo tra E e il fibrato banale $M \times \mathbb{R}^n$.

Lemma 1.12. Siano $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n e $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, $\{(U_\alpha, \phi'_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ due *trivializzazioni*. Queste determinano delle mappe di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$ rispettivamente. Esistono delle funzioni $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tali che su $U_\alpha \cap U_\beta$ vale

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \circ g'_{\alpha\beta} \circ \lambda_\beta^{-1}$$

(per λ_β^{-1} intendiamo la funzione che a ogni punto p associa $\lambda_\beta(p)^{-1}$).

Due classi di funzioni di transizione legate da questa relazione si dicono *equivalenti*.

Definizione 1.13. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$. Diciamo che il gruppo di struttura del fibrato *si riduce* a un sottogruppo H di $GL_n(\mathbb{R})$ se esistono delle funzioni di transizione a valori in H che siano equivalenti alle $g_{\alpha\beta}$.

Se il gruppo di struttura di un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ di rango n può essere ridotto a $GL_n^+(\mathbb{R})$, il sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici con determinante positivo, diciamo che il fibrato è *orientabile*. Una *trivializzazione* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ è *orientata* se le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ hanno determinante positivo su ogni punto di M . Due *trivializzazioni orientate* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathbb{N}}$ sono *equivalenti* se per ogni p in $U_\alpha \cap U_\beta$ e per ogni α, β la funzione $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha determinante positivo. Questa è una relazione di equivalenza, e le classi di equivalenza per tale relazione si dicono *orientazioni del fibrato*. Vale che un fibrato vettoriale orientabile su una varietà connessa ammette esattamente due orientazioni.

Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n , possiamo dotare E di una metrica Riemanniana e ridurre il gruppo di struttura del fibrato a $O(n)$. Consideriamo un ricoprimento *trivializzante* per il fibrato $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, per ogni α esistono $s_{\alpha,1}, \dots, s_{\alpha,n}$ sezioni linearmente indipendenti per il fibrato $E|_{U_\alpha}$. Definiamo una funzione

$$q_\alpha : E|_{U_\alpha} \times E|_{U_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $q_\alpha|_{E_p}$ sia una forma quadratica definita positiva con $\{s_{\alpha,1}(p), \dots, s_{\alpha,n}(p)\}$ base ortonormale. Questo definisce una metrica locale sul fibrato. Usando una partizione

dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ relativa al ricoprimento \mathcal{U} possiamo definire una metrica globale

$$q = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} q_{\alpha}$$

Scegliamo delle trivializzazioni locali ϕ_{α} che mandano sezioni ortonormali di $E|_{U_{\alpha}}$ in sezioni ortonormali di $U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$, ottenendo così delle funzioni di transizione a valori in $O(n)$.

1.2 Operazioni tra fibrati vettoriali

Vediamo come alcune operazioni note tra spazi vettoriali si estendono ai fibrati vettoriali.

Siano $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M$ due fibrati vettoriali di rango n, m rispettivamente e sia $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di M che trivializza entrambi i fibrati. Definiamo la *somma diretta* $E \oplus E'$ come il fibrato vettoriale su M la cui fibra su un punto p in M è costituita da $E_p \oplus E'_p$, con funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} \oplus g'_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \oplus GL_m(\mathbb{R})$$

indotte da quelle di E, E' . In modo analogo possiamo definire il *prodotto tensoriale* $E \otimes E'$: la fibra su un punto p di M è $E_p \otimes E'_p$ e le sue funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \otimes GL_m(\mathbb{R})$$

sono indotte da quelle di E, E' .

Definiamo anche il *fibrato duale* E^* , la cui fibra su un punto p di M è il duale E_p^* di E_p . Sia $\phi_{\alpha} : E|_{U_{\alpha}} \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$ una trivializzazione per il fibrato, questa induce una mappa $(\phi_{\alpha}^T)^{-1} : E^*|_{U_{\alpha}} \rightarrow U_{\alpha} \times (\mathbb{R}^n)^*$, che è una trivializzazione per E^* . Le funzioni di transizione di E^* sono quindi

$$(\phi_{\alpha}^T)^{-1} \circ \phi_{\beta}^T = ((\phi_{\alpha} \circ \phi_{\beta}^{-1})^T)^{-1} = (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}$$

Dal momento che gli spazi vettoriali $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^m$ sono isomorfi, possiamo definire $\text{Hom}(E, E')$ come il fibrato vettoriale $E^* \otimes E'$.

Siano E, E', E'' fibrati vettoriali su M e $f : E \rightarrow E', g : E' \rightarrow E''$ omomorfismi di fibrati. Diciamo che la successione

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$$

è esatta se per ogni p in M è esatta la successione di spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow E_p \xrightarrow{f} E'_p \xrightarrow{g} E''_p \longrightarrow 0$$

In [Hus94, Cap. 3, Teorema 9.6] viene mostrato che se una successione di fibrati vettoriali è esatta allora spezza, cioè esiste $\Phi : E' \rightarrow E \oplus E''$ isomorfismo di fibrati vettoriali.

Una costruzione che non dipende dalla struttura lineare delle fibre è quella del *pullback*. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato, chiamiamo *pullback* di E tramite f il fibrato

$$f^{-1}E = \{(n, e) \in N \times E \mid f(n) = \pi(e)\}$$

con proiezione $f^{-1}E \rightarrow N$ data dalla restrizione della proiezione sul primo fattore. Notiamo che il pullback di un fibrato banale è ancora un fibrato banale, quindi delle trivializzazioni per $f^{-1}E$ sono indotte da quelle di E . La fibra di $f^{-1}E$ sopra a un punto y di N è isomorfa a $E_{f(y)}$. Inoltre date delle mappe $g : M'' \rightarrow M'$ e $f : M' \rightarrow M$ si ha $(f \circ g)^{-1}E = g^{-1}(f^{-1}E)$ ([Hus94, Cap. 2, Proposizione 5.7]). In particolare $\text{Vect}_k(M)$, l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali di rango k su M , determina un funtore controvariante dalla categoria delle varietà lisce alla categoria degli insiemi puntati (come punto base scegliamo il fibrato banale). Inoltre se $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$ sono le funzioni di transizione di E si ha che $f^*g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$ sono le funzioni di transizione di $f^{-1}E$.

Prendere il pullback di un fibrato $\pi : E \rightarrow M$ tramite una mappa $f : N \rightarrow M$ induce una mappa $f^{-1}E \rightarrow E$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Nel caso dei fibrati vettoriali vale il seguente risultato, che mostra come il pullback tramite una mappa $f : N \rightarrow M$ sia influenzato dal tipo di omotopia di M (una dimostrazione viene data in [Hus94, Cap. 3, Teorema 4.7]).

Teorema 1.14. *Siano $f_0, f_1 : N \rightarrow M$ mappe tra varietà e $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Se f_0 e f_1 sono omotope allora i pullback $f_0^{-1}E$ e $f_1^{-1}E$ sono isomorfi.*

Nel caso particolare in cui M sia una varietà contraibile si ha che ogni fibrato vettoriale su M è banale. Infatti se $f : M \rightarrow \{p\}$ è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica $g : \{p\} \rightarrow M$ si ha che $g \circ f$ è omotopa a id_M . Per Teorema 1.14 vale quindi

$$E = (g \circ f)^{-1}E = f^{-1}(g^{-1}E)$$

D'altra parte $g^{-1}E$ è un fibrato su un punto, quindi è banale e di conseguenza lo è anche $E = f^{-1}(g^{-1}E)$.

1.3 Forme differenziali

Iniziamo dando la definizione di forma differenziale per \mathbb{R}^n , generalizzandola in seguito al caso delle varietà.

Definizione 1.15. Date x_1, \dots, x_n delle coordinate lineari su \mathbb{R}^n , sia Ω^* l'algebra su \mathbb{R} generata dagli elementi dx_1, \dots, dx_n con le relazioni

$$\begin{cases} (dx_i)^2 = 0 & i = 1, \dots, n \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i & i \neq j \end{cases}$$

Le *forme differenziali* su \mathbb{R}^n sono gli elementi dello spazio vettoriale

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$$

dove \mathcal{C}^∞ è l'algebra delle funzioni C^∞ su \mathbb{R}^n .

Possiamo dotare Ω^* della struttura di algebra graduata, considerando le sottoalgebre Ω^q generate rispettivamente dai prodotti $dx_{i_1} \dots dx_{i_q}$ al variare di $i_1 < \dots < i_q$ in $\{1, \dots, n\}$ per $q > 0$. Per $q = 0$ poniamo $\Omega^0 = \mathbb{R}$. Questo induce una struttura graduata anche sulle forme differenziali:

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Omega^q(\mathbb{R}^n), \quad \Omega^q(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^q$$

Gli elementi di $\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ si dicono q -forme differenziali. Se ω è una q -forma differenziale diciamo che $\deg \omega = q$ è il suo grado. Una q -forma ω può essere scritta in modo unico come

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_q} f_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \dots dx_{i_q}$$

dove $f_{i_1 \dots i_q}$ sono funzioni C^∞ su \mathbb{R}^n . Semplifichiamo la notazione usando i multi-indici $I = (i_1, \dots, i_q)$ con $i_1 < \dots < i_q$ e scriviamo

$$\omega = \sum f_I dx_I$$

Definizione 1.16. Si dice *derivata esterna* l'operatore lineare

$$d : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{*+1}(\mathbb{R}^n)$$

definito sui gradi come segue:

(i) se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ allora

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

(ii) con le stesse notazioni di sopra, se $\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ è una q -forma allora

$$d\omega = \sum df_I dx_I$$

Definizione 1.17. Il *prodotto wedge* tra due forme $\omega = \sum f_I dx_I$ e $\tau = \sum g_J dx_J$ è definito come

$$\omega \wedge \tau = \sum f_I g_J dx_I dx_J$$

Osservazione 1.18. Vale che $\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$. Quindi il prodotto wedge rende $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ un'algebra commutativa graduata.

Definizione 1.19. Sia ω una q -forma differenziale. Diciamo che ω è *chiusa* se $d\omega = 0$, che è *esatta* se esiste una $q - 1$ forma τ tale che $d\tau = \omega$.

Proposizione 1.20. *Il differenziale di una forma esatta è nullo, cioè $d^2 = 0$.*

Possiamo estendere la definizione delle forme differenziali al caso delle varietà. Osserviamo che Ω^* è un funtore controvariante dalla categoria degli spazi Euclidei $\{\mathbb{R}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con mappe lisce alla categoria delle algebre commutative graduate con i loro omomorfismi. Infatti a ogni mappa liscia

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

possiamo associare un omomorfismo di algebre graduate definito come segue. Siano x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_n le coordinate standard rispettivamente su \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n e consideriamo $\omega = \sum g_I dy_I$ una q -forma su \mathbb{R}^n . Definiamo il *pullback* di f come

$$f^* : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^m)$$

tale che $f^*(\omega) = \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \dots df_{i_q}$, dove $f_j = y_j \circ f$.

Proposizione 1.21. *Sia $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa liscia. Il suo pullback f^* commuta con la derivata esterna, cioè $f^* \circ d = d \circ f^*$.*

Proposizione 1.22. *La derivata esterna di una forma differenziale è indipendente dal sistema di coordinate scelto. Più precisamente, se x_1, \dots, x_n sono le coordinate standard su \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo e $u_i = x_i \circ f$ sono le coordinate indotte da f , allora*

$$d\left(\sum g_i du_i\right) = \sum dg_i du_i$$

Diamo adesso la definizione di forma differenziale nel caso generico di una varietà.

Definizione 1.23. Sia M una varietà con atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$. Una *forma differenziale* su M è una famiglia di forme differenziali $\{\omega_\alpha\}_\alpha$, dove ω_α è definita su U_α , che siano compatibili sulle intersezioni. In particolare se $i : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U_\alpha$ e $j : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U_\beta$ sono le inclusioni, deve valere che $i^*\omega_\alpha = j^*\omega_\beta$ per ogni $\alpha \neq \beta$.

Chiamiamo *supporto* di una forma $\omega \in \Omega^*(M)$ l'insieme $\text{supp}(\omega)$ dato dalla chiusura dell'insieme dei punti di M su cui ω si annulla.

In modo analogo a quanto fatto per \mathbb{R}^n possiamo definire la derivata esterna, il prodotto wedge e il pullback di mappe lisce tra varietà. In questo modo Ω^* è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà.

Definiamo adesso l'integrale di una forma differenziale. Siano x_1, \dots, x_n le coordinate standard di \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ a supporto compatto e σ una permutazione di $\{1, \dots, n\}$. L'integrale della n -forma $\omega = f dx_{\sigma(1)} \dots dx_{\sigma(n)}$ è l'integrale di f :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \text{sgn}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$$

Vediamo che questa definizione non dipende dalle coordinate in cui scriviamo ω , a meno di un segno. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo e siano Φ_1, \dots, Φ_n le coordinate indotte da Φ , l'applicazione lineare del cambio di base è rappresentata in coordinate dalla matrice Jacobiana di Φ . La forma $dx_1 \dots dx_n$ è il determinante su \mathbb{R}^n , mentre $d\Phi_1 \dots d\Phi_n$ è il determinante su \mathbb{R}^n rispetto alle coordinate indotte da Φ . Di conseguenza

$$d\Phi_1 \dots d\Phi_n = J_\Phi dx_1 \dots dx_n$$

dove J_Φ è il determinante della matrice Jacobiana di Φ . Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^* \omega &= \text{sgn}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \Phi) J_\Phi dx_1 \dots dx_n \\ &= \text{sgn}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \Phi) J_\Phi dx_1 \dots dx_n \\ &= \text{sgn}(J_\Phi) \int_{\mathbb{R}^n} \omega \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da Teorema del cambio di variabile negli integrali. In particolare l'integrale di una forma differenziale è ben definito a meno del segno, ed è invariante per cambio di coordinate che preservano l'orientazione (cioè che hanno determinante Jacobiano positivo).

Possiamo definire l'orientazione di una varietà per mezzo delle forme differenziali grazie al seguente risultato.

Proposizione 1.24. *Una varietà M di dimensione n è orientabile se e solo se ammette una n -forma globale mai nulla.*

Date due n -forme ω e ω' mai nulle su una varietà M di dimensione n , esiste una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mai nulla tale che $\omega = f\omega'$. In particolare f è positiva o negativa. Diciamo che ω e ω' sono equivalenti se f è positiva. Questa relazione di equivalenza induce una partizione delle n -forme in due classi $[M]$ e $-[M]$, dette *orientazioni* di M .

Sia M una n -varietà orientabile con orientazione $[M]$ e sia ω una n -forma a supporto compatto. Consideriamo un atlante orientato $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ e una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ relativa al ricoprimento. L'integrale di ω è definito come

$$\int_M \omega = \int_{[M]} \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega, \quad \text{con} \quad \int_{U_\alpha} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \omega)$$

ed è indipendente dalla scelta dell'atlante orientato e della partizione dell'unità.

Definizione 1.25. *Una varietà topologica con bordo di dimensione n è uno spazio topologico M di Hausdorff a base numerabile per cui ogni punto ammette un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n oppure al semispazio $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Si definisce un atlante in modo analogo al caso senza bordo. M è una varietà con bordo *liscia* se le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ sono diffeomorfismi.*

D'ora in poi per *varietà con bordo* intenderemo varietà *liscia* con bordo. Data M una varietà con bordo e $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ un atlante, il *bordo* ∂M di M è l'insieme dei punti che corrispondono, tramite le ϕ_α , ai punti di $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Si dimostra che il bordo ∂M è una varietà senza bordo di dimensione $n-1$ ([Lee13, Proposition 1.38]).

Definizione 1.26. Consideriamo \mathbb{H}^n con l'orientazione standard di \mathbb{R}^n , data dalla classe di equivalenza della forma $dx_1 \dots dx_n$. L'*orientazione indotta* su $\partial\mathbb{H}^n$ è la classe di equivalenza della forma $(-1)^n dx_1 \dots dx_n$. Per una varietà orientata con bordo M di dimensione n definiamo come segue l'*orientazione indotta* $[\partial M]$ su ∂M : se $U \subseteq M$ è un aperto e $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo il cui differenziale ha determinante positivo allora $\phi^*[\partial\mathbb{H}^n] = [\partial M] \mid_{\partial U}$, dove $\partial U = U \cap \partial M$.

Possiamo definire l'integrale su una varietà con bordo in modo analogo al caso senza bordo. Il seguente risultato, noto come Teorema di Stokes, fornisce una relazione tra l'integrale di una forma e quello della sua derivata esterna.

Teorema 1.27. *Sia M una varietà con bordo orientata di dimensione n e sia ω una $n-1$ forma a supporto compatto su M . Supponiamo che ∂M abbia l'orientazione indotta da quella di M , allora*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

1.4 Coomologia di de Rham

L'algebra graduata delle forme differenziali su una varietà $\Omega^*(M)$ con l'operatore di derivata esterna $d : \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$ si dice *complesso di de Rham*. Questo è un esempio di complesso differenziale, o complesso di cocatene.

Definizione 1.28. Un *complesso differenziale*, o *complesso di cocatene*, è una successione di spazi vettoriali $C = \{C^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ con omomorfismi $d^q : C^q \rightarrow C^{q+1}$, detti *differenziali*

$$\dots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} C^q \xrightarrow{d^q} C^{q+1} \longrightarrow \dots$$

tali che $d^q \circ d^{q-1} = 0$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$. Gli elementi di C si dicono *cocatene*, mentre gli elementi di $\ker d$ e di $\text{im} d$ sono rispettivamente i *cocicli* e i *cobordi*. Lo spazio vettoriale $H^q(C) = \ker d^q / \text{im} d^{q-1}$ si dice *q -esimo gruppo di coomologia* e

$$H^*(C) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)$$

è la *coomologia* del complesso C .

Nel caso delle varietà, la coomologia associata al complesso $\Omega^*(M)$ si dice *coomologia di de Rham*, e la indichiamo con $H^*(M)$.

Definizione 1.29. Siano A e B complessi di cocatene con differenziali rispettivamente d_A e d_B . Una mappa lineare $f : A \rightarrow B$ è un *omomorfismo* di complessi di cocatene se commuta con i differenziali, cioè se $f d_A = d_B f$.

Osservazione 1.30. Dalla condizione $fd_A = d_Bf$ segue che f induce una mappa in coomologia per passaggio al quoziente.

Osservazione 1.31. Sia $f : M \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà, questa induce una mappa $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ tale che $f^*d = df^*$. Di conseguenza f induce una mappa in coomologia $H^*(N) \rightarrow H^*(M)$, cioè anche la coomologia di de Rham è un funtore controvariante. In particolare la coomologia di una varietà è invariante per diffeomorfismo.

Definizione 1.32. Siano A e B complessi di cocatene con differenziali rispettivamente d_A e d_B e siano $f, g : A \rightarrow B$ omomorfismi di complessi di cocatene. Un'omotopia di cocatene tra f e g è una funzione $K : A \rightarrow B$ tale che

$$f - g = \pm(d_BK \pm Kd_A)$$

Osservazione 1.33. Se esiste un'omotopia di cocatene tra f e g allora inducono la stessa mappa in coomologia.

Enunciamo adesso alcuni risultati utili al calcolo esplicito della coomologia di una varietà. Una dimostrazione del seguente fatto viene data in [HS71, Cap. IV, Teorema 2.1].

Proposizione 1.34. *Consideriamo una successione esatta corta di complessi differenziali*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Esiste un omomorfismo $\delta : H^(C) \rightarrow H^*(A)$, detto omomorfismo di connessione, che rende esatta la successione*

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^q(A) \xrightarrow{f^*} H^q(B) \xrightarrow{g^*} H^q(C) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(A) \xrightarrow{f^*} \dots$$

Proposizione 1.35. *Siano M una varietà, U e V due aperti che ricoprono M . Si ha una successione esatta di complessi differenziali*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\phi} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\psi} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

dove $\phi(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$ e $\psi(\omega, \tau) = (\omega - \tau)|_{U \cap V}$.

La successione

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

si dice *successione di Mayer-Vietoris*. Per la Proposizione 1.34 esiste una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H^q(M) \longrightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \longrightarrow H^q(U \cap V) \longrightarrow H^{q+1}(M) \longrightarrow \dots$$

che mette in relazione la coomologia di M con quella di $U, V, U \cap V$.

Proposizione 1.36. *Siano $f, g : M \rightarrow N$ mappe lisce tra varietà. Se f e g sono omotope allora inducono la stessa mappa in coomologia.*

Da questo segue che la coomologia è un invariante omotopico, non solo per diffeomorfismo. In particolare se due varietà sono omotopicamente equivalenti allora hanno la stessa coomologia.

Teorema 1.37. *Siano M e N due varietà, se la coomologia di N ha dimensione finita allora $H^*(M \times N) = H^*(M) \otimes H^*(N)$, cioè*

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(N)$$

Questo è in realtà un caso particolare del seguente teorema, che dimostreremo nel Capitolo 2.

Teorema 1.38 (Leray-Hirsch). *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato con fibra F . Se $H^*(F)$ è finitamente generata ed esistono delle classi $e_1, \dots, e_r \in H^*(E)$ le cui restrizioni danno una base della coomologia di F allora $H^*(E)$ è un modulo libero su $H^*(M)$ con base $\{e_1, \dots, e_r\}$. In particolare*

$$H^*(E) = H^*(M) \otimes H^*(F)$$

Nel caso di un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ di rango n possiamo definire un'altra coomologia, detta *coomologia a supporto compatto verticale*.

Definizione 1.39. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n , una forma differenziale ω su E ha *supporto compatto in verticale* se per ogni $K \subseteq M$ compatto l'insieme $\pi^{-1}K \cap \text{supp}(\omega)$ è compatto. Indichiamo con $\Omega_{cv}^*(E)$ l'insieme di tali forme.

Le forme $\Omega_{cv}^*(E)$ con la restrizione del differenziale esterno d sono un complesso di cocatene, definiscono quindi una coomologia $H_{cv}^*(E)$ detta *coomologia a supporto compatto verticale*. Nel caso di un fibrato vettoriale orientato $\pi : E \rightarrow M$ possiamo definire globalmente un'operazione di *integrazione lungo la fibra* che a ogni k -forma $\omega \in \Omega_{cv}^k(E)$ associa una $(k-n)$ -forma su M . L'integrazione lungo la fibra commuta con il differenziale esterno, quindi induce una mappa in coomologia

$$\pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-n}(M)$$

Vale la seguente proprietà nel caso di un fibrato banale $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$.

Proposizione 1.40. *L'integrazione lungo la fibra induce un isomorfismo*

$$\pi_* : H_{cv}^*(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{*-n}(M)$$

Capitolo 2

Il complesso di Čech-de Rham

In questo capitolo introduciamo il complesso di Čech-de Rham, un oggetto algebrico che estende il complesso di de Rham e con il quale diamo una versione generalizzata della successione di Mayer-Vietoris. Con questo costruiamo due classi di coomologia associate a un fibrato vettoriale orientato, la classe di Eulero e la classe di Thom. Il riferimento principale per questo capitolo è [BT82, § 8-12]. Referenze più precise vengono dati nel testo.

2.1 Il principio di Mayer-Vietoris

Nel Capitolo 1 abbiamo introdotto la successione di Mayer-Vietoris, uno strumento che permette di relazionare la coomologia di una varietà M con quella di due aperti che la ricoprono. Estendiamo questa idea al caso generale di un ricoprimento aperto numerabile.

Consideriamo una varietà M con un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$. Per semplificare la notazione indichiamo con $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$ l'intersezione $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$. Abbiamo una successione di inclusioni

$$M \longleftarrow \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha} \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \end{array} \bigsqcup_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0 \alpha_1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \\ \xleftarrow{\partial_2} \end{array} \bigsqcup_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \begin{array}{c} \xleftarrow{\partial_0} \\ \xleftarrow{\partial_1} \\ \xleftarrow{\partial_2} \\ \xleftarrow{\partial_3} \end{array} \dots$$

dove ∂_i è l'inclusione che "si dimentica" dell' i -esimo aperto. Ad esempio

$$\partial_2 : U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \longrightarrow U_{\alpha_0 \alpha_1}$$

è l'inclusione di $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ come sottoinsieme di $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$.

Questa successione di inclusioni induce una successione di restrizioni di forme differenziali

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha} \Omega^*(U_{\alpha}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \end{array} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_3} \end{array} \dots$$

Un elemento ω di $\prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ è un vettore di q -forme differenziali, le cui componenti sono delle forme $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ di $\Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$.

Definizione 2.1. Definiamo l'operatore

$$\delta : \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \longrightarrow \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}})$$

dato dalla somma a segni alterni delle δ_i . Più precisamente, se ω è un elemento di $\prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ si ha

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

Si verifica che vale $\delta^2 = 0$ ([BT82, Proposizione 8.3]), otteniamo quindi un complesso di cocatene.

Per definizione gli indici $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ della forma $\omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}$ sono ordinati in modo crescente, estendiamo la notazione ammettendo indici in qualsiasi ordine, con la convenzione che scambiare due indici cambia il segno della forma:

$$\omega_{\dots \alpha \dots \beta \dots} = -\omega_{\dots \beta \dots \alpha \dots}$$

Vediamo adesso una generalizzazione della successione di Mayer-Vietoris.

Proposizione 2.2. *Siano M una varietà e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto, si ha una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_\alpha) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Dimostrazione. Un elemento di $\prod \Omega^*(U_\alpha)$ annulla δ se e solo se determina una forma globale su M . Questo è equivalente a richiedere che le sue componenti coincidano sulle intersezioni $U_{\alpha_0 \alpha_1}$, cioè che sia un elemento dell'immagine di r .

Consideriamo una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ relativa al ricoprimento \mathcal{U} . Dato un elemento $\omega \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ tale che $\delta\omega = 0$, definiamo $\tau \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}})$ come

$$\tau_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$$

Allora

$$(\delta\tau)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i \tau_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = \sum_{i, \alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p}$$

Per ipotesi su ω abbiamo

$$(\delta\omega)_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_p} = \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = 0$$

Sostituendo nell'espressione ottenuta per $(\delta\tau)_{\alpha_0\dots\alpha_p}$:

$$(\delta\tau)_{\alpha_0\dots\alpha_p} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \sum_{i=0}^p (-1)^i \omega_{\alpha\alpha_0\dots\hat{\alpha}_i\dots\alpha_p} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\dots\alpha_p} = \omega_{\alpha_0\dots\alpha_p}$$

da cui l'esattezza della successione. \square

Osservazione 2.3. La definizione di τ come nella dimostrazione fornisce un'omotopia di cocatene per questo complesso. Infatti se $K : \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\dots\alpha_p}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}})$ è tale che

$$(K\omega)_{\alpha_0\dots\alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \omega_{\alpha\alpha_0\dots\alpha_{p-1}}$$

si ha

$$\delta K + K\delta = id$$

Quindi K è un'omotopia di cocatene tra l'indentità e la mappa nulla, di conseguenza la coomologia del complesso è banale e la successione è esatta.

Possiamo organizzare la nuova successione di Mayer-Vietoris in un complesso doppio. Un *complesso doppio* è una famiglia di spazi vettoriali $K^{*,*} = \{K^{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ dotata di mappe

$$\delta : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}, \quad d : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$$

tali che $\delta^2 = 0$, $d^2 = 0$ e $\delta d = d\delta$. Possiamo definire un complesso di cocatene a partire dal doppio complesso $K^{*,*}$ considerando gli spazi vettoriali ottenuti sommando lungo le diagonali

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

e il differenziale $D = D' + D''$ su $K^{p,q}$ con $D' = \delta$ e $D'' = (-1)^p d$ su $K^{p,*}$: vale infatti che $D^2 = 0$. Definiamo la coomologia $H_D^*\{K\}$ del doppio complesso $K^{*,*}$ come la coomologia del complesso di cocatene K^* .

Nel nostro caso poniamo $K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto. Abbiamo un complesso doppio *umentato* (cioè aggiungiamo all'inizio ogni riga il nucleo della prima mappa orizzontale):

0	\longrightarrow	$\Omega^2(M)$	\xrightarrow{r}	$K^{0,2}$	$K^{1,2}$	$K^{2,2}$	
0	\longrightarrow	$\Omega^1(M)$	\xrightarrow{r}	$K^{0,1}$	$K^{1,1}$	$K^{2,1}$	
0	\longrightarrow	$\Omega^0(M)$	\xrightarrow{r}	$K^{0,0}$	$K^{1,0}$	$K^{2,0}$	

Gli elementi di $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ si dicono p -cocatene a coefficienti nelle q -forme. Un elemento $\phi = \phi_0 + \dots + \phi_n \in K^n$, con $\phi_i \in C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$, tale che $D\phi = 0$ è un D -cociclo. Lo rappresentiamo graficamente in questo modo

$$\left\{ \begin{array}{l} D''a_0 = 0 \\ \delta a_0 = -D''a_1 \\ \vdots \\ \delta a_{n-1} = -D''a_n \\ \delta a_n = 0 \end{array} \right.$$

0				
↑				
ϕ_0	→			
	↑			
	ϕ_1	→		
			⋮	
				↑
			ϕ_n	→ 0

Un D -cobordo è un elemento ϕ per cui esiste ψ tale che $D\psi = \phi$.

Il doppio complesso $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) = \{C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ è il *complesso di Čech-de Rham* (per $p < 0$ oppure $q < 0$ poniamo $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = 0$). Indichiamo con $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ anche il complesso di cocatene associato. Per la Proposizione 2.2 il complesso di Čech-de Rham aumentato ha le righe esatte, da cui il seguente risultato.

Proposizione 2.4. *Siano M una varietà e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto. La mappa di restrizione $r : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ induce un isomorfismo*

$$r^* : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_D^*\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$$

tra la coomologia di de Rham di M e la coomologia del complesso di Čech-de Rham.

Dimostrazione. Dal momento che $\delta r = 0$ si ha

$$Dr = (\delta + (-1)^p d)r = (-1)^p dr = (-1)^p rd$$

quindi r è una mappa di cocatene e induce una mappa r^* in coomologia.

Consideriamo un D -cociclo

$$\phi = \sum_{i=0}^n \phi_i, \quad \phi_i \in C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$$

Per esattezza delle righe del complesso aumentato esiste ψ_n tale che $\delta\psi_n = \phi_n$. Allora l'elemento $\phi - D\psi_n$ è un D -cociclo che rappresenta la stessa classe di coomologia di ϕ , ma la cui componente in grado $(n, 0)$ è nulla. Ripetendo questo ragionamento possiamo supporre che ϕ sia un elemento di $C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$, in particolare $d\phi = 0$ e $\delta\phi = 0$. Da queste due condizioni segue che ϕ determina una forma chiusa globale su M , quindi r^* è surgettiva.

Vediamo adesso che r^* è iniettiva. Sia $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma chiusa, supponiamo che $r(\omega) = D\psi$ per un certo ψ , cioè $r^*([\omega]) = 0$. Scriviamo

$$\psi = \sum_{i=0}^{k-1} \psi_i, \quad \psi_i \in C^i(\mathcal{U}, \Omega^{k-i-1})$$

Dato che $D\psi$ è un elemento di $C^0(\mathcal{U}, \Omega^k)$ si ha $\delta\psi_{k-1} = 0$. Ragionando in modo analogo a prima possiamo assumere $\psi = \psi_0 \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^{k-1})$. Allora deve valere che $d\psi = D\psi$, cioè $\delta\psi = 0$. Questo significa che ψ determina una forma globale τ e vale che $d\tau = \omega$.

Da questo segue che r^* è un isomorfismo. \square

Diamo una formula esplicita per questo isomorfismo. In particolare esiste un omomorfismo di complessi di cocatene

$$f : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

tale che $f \circ r = id_{\Omega^*(M)}$ e $r \circ f$ è omotopa all'identità di $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$. In particolare f induce un isomorfismo tra le due coomologie. Una dimostrazione del seguente risultato è data in [BT82, Proposizione 9.5].

Proposizione 2.5. *Siano M una varietà, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ una partizione dell'unità relativa a \mathcal{U} . Consideriamo $K : C^p(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow C^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^*)$ l'omotopia di cocatene data da*

$$(K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$$

Dati $\alpha = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$ con α_i in $C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$ e $\beta = D\alpha = \beta_0 + \dots + \beta_{n+1}$ con β_i in $C^i(\mathcal{U}, \Omega^{n-i+1})$, definiamo $f : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \longrightarrow \Omega^*(M)$ tale che

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^n (-D''dK)^i \alpha_i - \sum_{i=0}^{n+1} K(-D''dK)^{i-1} \beta_i \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$$

Allora $f \circ r = id_{\Omega^*(M)}$ e $1 - r \circ f = DL + LD$, dove L è l'omotopia di cocatene definita da $L\alpha = (L\alpha)_1 + \dots + (L\alpha)_{n-1}$ con

$$(L\alpha)_p = \sum_{i=p+1}^n K(-D''K)^{i-p-1} \alpha_i \in C^p(\mathcal{U}, \Omega^{n-p-1})$$

Possiamo aumentare anche le colonne del complesso di Čech-de Rham, aggiungendo una riga costituita dai nuclei $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ delle mappe

$$d : \prod \Omega^0(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \longrightarrow \prod \Omega^1(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^2(U_\alpha) & \prod \Omega^2(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^2(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^1(U_\alpha) & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^0(U_\alpha) & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
\hline
& & & & \uparrow i & \uparrow i & \uparrow i \\
& & & & C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} \dots \\
& & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
& & & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Gli elementi di $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ sono quindi funzioni lisce localmente costanti sulle intersezioni $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$.

La riga che abbiamo aggiunto

$$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

è un complesso di cocatene. La sua coomologia $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ si dice *coomologia di Čech* del ricoprimento \mathcal{U} .

Osservazione 2.6. Se le colonne del complesso aumentato fossero esatte, un ragionamento analogo a quello usato per mostrare la Proposizione 2.2 darebbe un isomorfismo tra la coomologia di Čech $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ e la coomologia $H_D^*\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$, che a sua volta è isomorfa alla coomologia di de Rham. I gruppi di coomologia

$$\prod_{\substack{q \geq 1 \\ \alpha_0 < \dots < \alpha_p}} H^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

misurano quanto la p -esima colonna non sia esatta e in generale non sono nulli. Tuttavia se \mathcal{U} è un buon ricoprimento le intersezioni $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ sono tutte contraibili, quindi hanno coomologia banale.

Teorema 2.7. *Siano M una varietà e \mathcal{U} un buon ricoprimento, si ha un isomorfismo $H_{dR}^*(M) \cong \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tra la coomologia di de Rham di M e la coomologia di Čech del ricoprimento \mathcal{U} .*

Da questo segue che la coomologia di Čech, che in generale dipende dal ricoprimento scelto, è la stessa per tutti i buoni ricoprimenti di una varietà.

Possiamo descrivere esplicitamente l'isomorfismo tra le due coomologie usando la Proposizione 2.5.

Proposizione 2.8. Sia $\eta \in C^n(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ un cociclo del complesso di Čech. La forma differenziale su M associata a η è data dalla formula

$$f(\eta) = (-1)^n (D''K)^n \eta$$

dove K è l'omotopia di cocatene definita nell'enunciato della Proposizione 2.5. Questa corrispondenza induce un isomorfismo in coomologia.

Il seguente lemma sarà utile nella dimostrazione del Teorema di Leray-Hirsch.

Lemma 2.9. Siano K e L complessi doppi con differenziale orizzontale δ e differenziale verticale d e $f : K \rightarrow L$ un omomorfismo di complessi doppi, supponiamo che $K^{p,q}$ e $L^{p,q}$ siano nulli per $p < 0$ oppure $q < 0$. Se f induce un isomorfismo tra i complessi doppi $H_d^{*,*}(K)$ e $H_d^{*,*}(L)$ allora f induce un isomorfismo tra $H_D^*\{K\}$ e $H_D^*\{L\}$.

Dimostrazione. Sia $f^* : H_D^*\{K\} \rightarrow H_D^*\{L\}$ la mappa indotta da f , mostriamo che è iniettiva e surgettiva.

Consideriamo un D -cociclo $a = a_0 + \dots + a_n \in K$, con $a_i \in K^{i, n-i}$, e supponiamo che esista un elemento $b = b_0 + \dots + b_{n-1}$ di L per cui $Db = f(a)$, con $b_i \in L^{i, n-i-1}$.

	0			
	↑			
	$f(a_0) \rightarrow$			
	↑	↑		
	$b_0 \rightarrow$	$f(a_1) \rightarrow$		
		⋮	⋮	
			↑	↑
			$b_{n-1} \rightarrow$	$f(a_n) \rightarrow$
				0

Dato che $da_0 = 0$ e $db_0 = f(a_0)$ esiste $c_0 \in K^{0, n-1}$ tale che $a_0 = dc_0$. Poniamo $a' = a - Dc_0$ e $b' = b - f(c_0)$, si ha che a e a' rappresentano la stessa classe di D -coomologia, $Db' = f(a')$ e $a'_0 = 0$. Dal momento che $db'_0 = f(a'_0) = 0$ esistono $\alpha \in K^{0, n-1}$ e $\beta \in L^{0, n-2}$ tali che $f(\alpha) = b'_0 - d\beta$, con $d\alpha = 0$. Poniamo $a'' = a' - D\alpha$ e $b'' = b' - f(\alpha)$, in modo tale che $Db'' = f(a'')$, $a''_0 = 0$ e $b''_0 = d\beta$. Dal fatto che $b''_0 = d\beta$ segue che esistono $\gamma \in K^{0, n-2}$ e $\varepsilon \in L^{0, n-2}$ tali che

$$b''_0 = f(d\gamma) + d\varepsilon = df(\gamma) + d\varepsilon$$

Poniamo $\tilde{b}'' = b'' - D(f(\gamma) - \varepsilon)$, allora $D\tilde{b}'' = a''$ e $\tilde{b}''_0 = 0$.

0				
0	$f(a''_1)$			
	\uparrow \tilde{b}''_1	$f(a''_2)$		
		\ddots	\ddots	
			\uparrow \tilde{b}''_{n-1}	$f(a''_n)$

Iterando questo procedimento ci riduciamo al caso in cui $a = a_n$ e $f(a) = Db$, dove b ha componenti nulle in $L^{i,n-i-1}$ per $i < n$. Questo implica che sia $f(a) = 0$, quindi esiste $\eta \in K^{-1,n}$ tale che $d\eta = a$. D'altra parte $K^{-1,n} = 0$, quindi $a = 0$. Segue che f^* è iniettiva.

Vediamo adesso che f^* è surgettiva. Consideriamo $c = c_0 + \dots + c_n \in L$ un D -cociclo con $c_i \in L^{i,n-i}$. Dato che $dc_0 = 0$ esistono $a_0 \in K^{0,n}$ e $\alpha \in L^{1,n-1}$ tali che $f(a_0) = c_0 + d\alpha$ e $da_0 = 0$. Poniamo $c' = c + D\alpha$, questi rappresentano la stessa classe di D -coomologia. Dato che $f(\delta a_0) = \delta c'_0 = dc'_1$ esiste $\varepsilon \in K^{1,n-1}$ tale che $\delta a_0 = d\varepsilon$, quindi

$$d(c'_1 - f(\varepsilon)) = dc'_1 - f(d\varepsilon) = dc'_1 - f(\delta a_0) = dc'_1 - \delta c'_0 = 0$$

Allora esistono $a_1 \in K^{1,n-1}$ e $\beta \in L^{1,n-2}$ tali che $c'_1 - f(\varepsilon) = f(a_1) - d\beta$ e $da_1 = 0$, cioè $f(a_1 - \varepsilon) = c'_1 - d\beta$. Poniamo $c'' = c' - D\beta$ e $a'_1 = a_1 - \varepsilon$, vale che $f(a_0) = c''_0$, $f(a_1) = c''_1$ e $\delta a_0 = -da'_1$.

Iteriamo questa costruzione fino a determinare un D -cociclo \tilde{c} che rappresenta la stessa classe di D -coomologia di c e un elemento $\tilde{a} = \tilde{a}_0 + \dots + \tilde{a}_{n-1}$ con $\tilde{a}_i \in K^{i,n-i}$, $f(\tilde{a}_i) = \tilde{c}_i$ e $D\tilde{a} = \delta\tilde{a}_{n-1}$. Vale che $f(\delta\tilde{a}_{n-1}) = \delta\tilde{c}_{n-1} = (-1)^n d\tilde{c}_n$, quindi esiste $\tilde{\varepsilon} \in K^{n,0}$ tale che $d\tilde{\varepsilon} = (-1)^n \delta\tilde{a}_{n-1}$. Da questo segue che

$$d(\tilde{c}_n - f(\tilde{\varepsilon})) = (-1)^n \delta\tilde{c}_{n-1} - (-1)^n f(\delta\tilde{a}_{n-1}) = 0$$

quindi esistono $\tilde{a}_n \in K^{n,0}$ e $\tilde{\alpha} \in L^{-1,n}$ tali che $d\tilde{a}_n = 0$ e $\tilde{c}_n - f(\tilde{\varepsilon}) = f(\tilde{a}_n) - d\tilde{\alpha}$. D'altra parte $L^{-1,n} = 0$, quindi $\tilde{\alpha} = 0$ e $\tilde{c}_n = f(\tilde{a}_n - \tilde{\varepsilon})$. Poniamo $\tilde{a}' = \tilde{a} - \tilde{\varepsilon}$, vale che $f(\tilde{a}') = \tilde{c}'$ e

$$D\tilde{a}' = D\tilde{a} - D\tilde{\varepsilon} = \delta\tilde{a}_{n-1} - \delta\tilde{\varepsilon} - (-1)^n d\tilde{\varepsilon} = -\delta\tilde{\varepsilon}$$

Vediamo che $\delta\tilde{\varepsilon} = 0$. Poiché vale $f(\delta(\tilde{a}_n - \tilde{\varepsilon})) = \delta\tilde{c}_n = 0$ segue che esiste $\gamma \in K^{-1,n+1}$ tale che $\delta(\tilde{a}_n - \tilde{\varepsilon}) = d\gamma$. Questo è uguale a 0 in quanto $K^{-1,n+1} = 0$. Allora \tilde{a}' è tale che $D\tilde{a}' = 0$ e $f(\tilde{a}') = c$, cioè f^* è surgettiva. \square

Teorema 2.10. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato con fibra F . Se $H^*(F)$ è finitamente generata ed esistono delle classi $e_1, \dots, e_r \in H^*(E)$ le cui restrizioni danno una base della coomologia di F allora $H^*(E)$ è un modulo libero su $H^*(M)$ con base $\{e_1, \dots, e_r\}$. In particolare*

$$H^*(E) = H^*(M) \otimes H^*(F)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento di M . Dal momento che π è surgettiva vale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se e solo se $\pi^{-1}U_\alpha \cap \pi^{-1}U_\beta \neq \emptyset$, quindi π induce una mappa tra i complessi doppi $\pi^* : C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$. Siano $e_1, \dots, e_r \in H^*(E)$ le classi di coomologia le cui restrizioni danno una base di $H^*(F)$, sugli aperti U_α possiamo definire una proiezione $\rho : \pi^{-1}U_\alpha \rightarrow F$. Definiamo quindi una mappa

$$\pi_{\mathcal{U}}^* : H^*(F) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$$

definita da $\pi_{\mathcal{U}}^*([e_i] \otimes \phi) = \rho^* e_i \wedge \pi^* \phi$.

Sul complesso $H^*(F) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ consideriamo il differenziale ottenuto da $id \otimes \delta$ e $id \otimes d$. La sua coomologia è quindi $H^*(F) \otimes H^*(M)$. Dato che la coomologia di $C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$ è isomorfa a $H^*(E)$ è sufficiente vedere che $\pi_{\mathcal{U}}^*$ induce un isomorfismo in coomologia.

La d-coomologia di $C^p(\mathcal{U}, \Omega^*)$ è data da

$$\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^*(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \times F) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^*(F)$$

Inoltre si ha una mappa naturale

$$H^*(F) \otimes \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \rightarrow \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^*(F)$$

definito dall'associazione

$$[e_i] \otimes [\phi] \mapsto \left(\int_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}} \phi_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \right) [e_i]$$

Questo è un isomorfismo perché surgettiva e tra spazi vettoriali della stessa dimensione. Quindi $\pi_{\mathcal{U}}^*$ induce un isomorfismo tra $H_{id \otimes d}^{*,*}(H^*(F) \otimes C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$ e $H_d^{*,*}(C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*))$. Per il Lemma 2.9 si ha quindi la tesi. \square

2.2 La classe di Eulero di un fibrato in sfere

In questa sezione ci concentriamo sui fibrati in sfere, cioè con fibra S^n , al fine di determinare una classe di coomologia che rispetti le ipotesi del Teorema di Leray-Hirsch. In particolare vogliamo capire quando esiste una forma differenziale ψ chiusa la cui restrizione alla fibra rappresenta un generatore di $H^n(S^n)$. Nel fare questo costruiamo una classe di coomologia, la *classe di Eulero*, che rappresenta un'ostacolo alla chiusura di ψ .

Assumiamo che lo spazio base di un fibrato in sfere sia sempre connesso.

Definizione 2.11. Siano M una varietà e $\pi : E \rightarrow M$ con fibra S^n . Questo è *orientabile* se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ di M trivializzante per il fibrato e un generatore $[\sigma_\alpha]$ di $H^n(E|_{U_\alpha})$ per ogni α per cui vale $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$ in $H^*(E|_{U_\alpha \cap U_\beta})$. Una tale scelta di generatori si dice *orientazione* del fibrato e il fibrato con una data orientazione si dice *orientato*.

Un modo naturale di costruire un fibrato in sfere è quello di usare un fibrato vettoriale. Sia $\pi : E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale di rango $n+1$ dotato di una metrica Riemanniana, il suo gruppo di struttura è $O(n+1)$. Consideriamo il fibrato $S(E)$ la cui fibra su $p \in M$ è costituita dai vettori unitari di E_p , con funzioni di transizione date dalle restrizioni di quelle di E : $S(E)$ è un fibrato con fibra S^n e gruppo di struttura $O(n+1)$.

Osservazione 2.12. Sia $\pi : E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale, consideriamo E^0 il complementare della sezione nulla. Questo è omotopicamente equivalente a un fibrato in sfere. Inoltre ogni metrica Riemanniana su E induce un fibrato $S(E)$ che è omotopicamente equivalente a E^0 .

Osservazione 2.13. Fissata un'orientazione della sfera S^n , consideriamo una forma chiusa $\sigma \in \Omega^n(S^n)$ che rappresenta un generatore di $H^n(S^n)$, cioè tale che

$$\int_{S^n} \sigma = 1$$

Se g è un elemento di $O(n+1)$ si ha che

$$\int_{S^n} g^* \sigma = \int_{g(S^n)} \det g \sigma = \int_{S^n} \det g \sigma = \det g$$

In particolare σ e $g^* \sigma$ rappresentano la stessa classe di coomologia se e solo se g è un elemento di $SO(n+1)$.

Proposizione 2.14. *Un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ è orientabile se e solo se il fibrato in sfere associato $S(E) \rightarrow M$ è orientabile. In particolare possiamo scegliere su E e su $S(E)$ le stesse funzioni di transizione, e quindi lo stesso gruppo di struttura.*

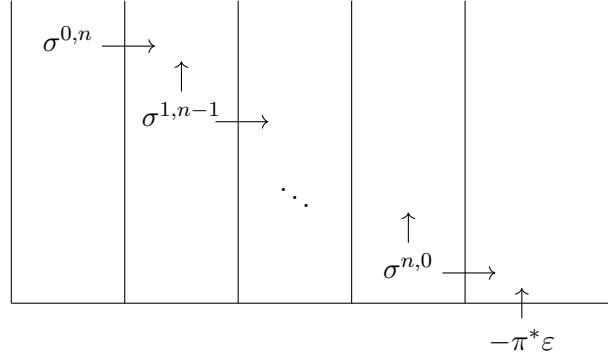
Una dimostrazione di questo fatto viene data in [BT82, Proposizione 11.2]. Il concetto di orientazione per un fibrato vettoriale E coincide quindi con quello del fibrato in sfere $S(E)$.

Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato in sfere con fibra S^n , cerchiamo una n -forma globale che si restringa a un generatore della coomologia di ogni fibra. Consideriamo $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento, iniziamo scegliendo una n -forma $\sigma_\alpha \in \Omega^n(E|_{U_\alpha})$ che rappresenti un generatore di $H^n(E|_{U_\alpha})$. Queste determinano un elemento $\sigma^{0,n}$ in $C^0(\mathcal{U}, \Omega^n)$ tale che $(\sigma^{0,n})_\alpha = \sigma_\alpha$. Per l'isomorfismo tra $H^*(E)$ e $H_D^*\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)\}$ è sufficiente estendere $\sigma^{0,n}$ a un D -cociclo del complesso di Čech-de Rham. Per fare questo deve valere necessariamente che $(\delta\sigma^{0,n})_{\alpha_0\alpha_1} = \sigma_{\alpha_1} - \sigma_{\alpha_0}$ sia esatta, cioè che $[\sigma_{\alpha_0}] = [\sigma_{\alpha_1}]$ per ogni $\alpha_0 \neq \alpha_1$, che è equivalente alla condizione di orientabilità del fibrato. Supponiamo quindi che $\pi : E \rightarrow M$ sia un fibrato in sfere orientabile, con orientazione $\sigma^{0,n}$, in particolare

esiste $\sigma^{1,n-1} \in C^1(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{n-1})$ tale che $\delta\sigma^{0,n} = d\sigma^{1,n-1}$. Dal momento che $H^k(S^n) = 0$ per $1 \leq k \leq n-1$ le k -forme chiuse su $E|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}$ sono esatte per tali valori di k , quindi $\sigma^{0,n}$ può essere estesa in modo analogo a una cocatena

$$\sigma = \sigma^{0,n} + \dots + \sigma^{n,0}, \quad \sigma^{i,n-i} \in C^i(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^{n-i})$$

tale che $D\sigma = \delta\sigma^{n,0}$.



Dato che $d(\delta\sigma^{n,0}) = \delta(d\sigma^{n,0}) = \pm\delta(\delta\sigma^{n-1,1}) = 0$ si ha che $\delta\sigma^{n,0}$ è un elemento di $C^{n+1}(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$. In particolare esiste $\varepsilon \in C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tale che $D\sigma = i(-\pi^*\varepsilon)$, dove i è l'inclusione $C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^0)$, in quanto la proiezione π induce un isomorfismo tra i complessi doppi. Vale che $\delta\varepsilon = 0$, quindi ε determina una classe di coomologia $e(E) \in H^{n+1}(M)$, che chiamiamo *classe di Eulero*. Questa classe di coomologia non dipende dalla scelta del buon ricoprimento \mathcal{U} , né dagli elementi $\sigma^{i,n-i}$ ([BT82, Proposizioni 11.7, 11.8]).

Osservazione 2.15. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientato, il fibrato E^0 ha un'orientazione indotta da quella di E . Definiamo la classe di Eulero $e(E)$ di E come la classe di Eulero di E^0 .

Se la classe di Eulero è nulla allora σ è un D -cociclo che ha la stessa classe di coomologia di $\sigma^{0,n}$. Dato che le restrizioni delle componenti di $\sigma^{0,n}$ generano la coomologia delle fibre, esiste una forma globale che si restringe a un generatore della coomologia di ogni fibra se e solo se il fibrato $E \rightarrow M$ è orientabile e la classe di Eulero $e(E)$ si annulla. La forma differenziale $\psi \in \Omega^n(E)$ associata a σ si dice *forma angolare*. Per la Proposizione 2.5, con le stesse notazioni, si ha

$$\psi = \sum_{i=0}^n (-1)^i (D''K)^i \sigma^{i,n-i} + (-1)^{n+1} K (D''K)^n (-\pi^*\varepsilon)$$

e $d\psi = -\pi^*e(E)$.

La classe di Eulero rappresenta un'ostruzione all'esistenza di una sezione per un fibrato in sfere orientato, e in particolare all'esistenza di una sezione mai nulla per un fibrato vettoriale orientato.

Proposizione 2.16. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato in sfere orientato, se ammette una sezione globale allora la classe di Eulero $e(E)$ è nulla.*

Dimostrazione. Sia $s : M \rightarrow E$ una sezione, allora $s^*\pi^* = id$. Con le stesse notazioni usate per la costruzione della classe di Eulero vale che

$$-\pi^*\varepsilon = D\sigma$$

Applicando s^* otteniamo la relazione

$$-\varepsilon = Ds^*\sigma$$

quindi la classe di Eulero è nulla. □

In particolare la classe di Eulero di un fibrato banale è sempre nulla.

2.3 La classe di Eulero di un fibrato vettoriale orientato di rango 2

Diamo una costruzione diversa della classe di Eulero nel caso dei fibrati vettoriali orientati di rango 2. Vediamo poi che tale descrizione della classe di Eulero coincide con quella vista nel caso generale. Infine determiniamo una formula esplicita in termini di un ricoprimento aperto della varietà, di una partizione dell'unità e delle funzioni di transizione del fibrato.

Consideriamo $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientato di rango 2 dotato di una metrica Riemanniana e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto che trivializza il fibrato. Scegliamo un frame ortonormale sopra a ogni U_α , che induce delle coordinate polari r_α e θ_α su $E^0|_{U_\alpha}$. Se x_1, \dots, x_n sono coordinate su U_α allora $\pi^*x_1, \dots, \pi^*x_n, r_\alpha, \theta_\alpha$ sono coordinate su $E^0|_{U_\alpha}$. Sulle intersezioni $U_\alpha \cap U_\beta$ i raggi r_α e r_β coincidono, mentre in generale θ_α e θ_β sono diversi. Data l'orientabilità del fibrato possiamo definire una "rotazione antioraria" su ogni fibra in modo coerente, chiamiamo quindi $\varphi_{\alpha\beta}$ l'angolo di rotazione antioraria dal sistema di coordinate di $\pi^{-1}U_\alpha$ a quello di $\pi^{-1}U_\beta$. Vale che

$$\theta_\beta = \theta_\alpha + \pi^*\varphi_{\alpha\beta}$$

Osservazione 2.17. Comporre le rotazioni da U_α a U_β e da U_β a U_γ è equivalente a ruotare da U_α a U_γ , quindi $\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\gamma}$ è un multiplo intero di 2π . In particolare vale $d\varphi_{\alpha\beta} + d\varphi_{\beta\gamma} - d\varphi_{\alpha\gamma} = 0$.

Proposizione 2.18. *Con le stesse notazioni, esistono delle 1-forme $\xi_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)$ tali che*

$$\frac{1}{2\pi}d\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\beta - \xi_\alpha$$

Dimostrazione. Sia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ una partizione dell'unità relativa a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$, definiamo

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} \rho_\gamma d\varphi_{\alpha\gamma}$$

Allora

$$\xi_\beta - \xi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma d(\varphi_{\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \sum_\gamma \rho_\gamma d\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} d\varphi_{\alpha\beta}$$

□

Consideriamo le 1-forme $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$. Vale che $d\xi_\alpha = d\xi_\beta$ su $U_\alpha \cap U_\beta$, di conseguenza esiste una 2-forma globale che ristretta a U_α coincide con $d\xi_\alpha$. Tale forma è chiusa in quanto localmente esatta e la sua classe di coomologia non dipende dalla scelta delle ξ_α . Infatti se $\{\bar{\xi}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ sono altre 1-forme tali che

$$\frac{1}{2\pi} d\varphi_{\alpha\beta} = \bar{\xi}_\beta - \bar{\xi}_\alpha = \xi_\beta - \xi_\alpha$$

allora vale $\bar{\xi}_\beta - \xi_\beta = \bar{\xi}_\alpha - \xi_\alpha$. Possiamo quindi definire una 1-forma globale ξ tale che $\xi|_{U_\alpha} = \bar{\xi}_\alpha - \xi_\alpha$, in particolare $d\bar{\xi}_\alpha - d\xi_\alpha$ differiscono per una forma esatta globale e determinano la stessa classe di coomologia. Vediamo che questa coincide con la classe di Eulero. Consideriamo $\pi^0 : E^0 \rightarrow M$ come un fibrato con fibra S^1 e gruppo di struttura $SO(2)$, supponiamo che \mathcal{U} sia un buon ricoprimento di M . Dalla definizione di $\varphi_{\alpha\beta}$ e di ξ_α si ha

$$\frac{d\theta_\beta}{2\pi} - \frac{d\theta_\alpha}{2\pi} = \pi^* \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{2\pi} = \pi^* \xi_\beta - \pi^* \xi_\alpha$$

Possiamo inserire all'interno del complesso di Čech-de Rham gli elementi che stiamo considerando:

$\frac{d\theta}{2\pi}$	$\pi^* \frac{d\varphi}{2\pi}$		
	$\pi^* \frac{\varphi}{2\pi}$	$-\pi^* \varepsilon$	
		↑ $-\pi^* \varepsilon$	

Per la Proposizione 2.8 la forma differenziale su M corrispondente a ε è $(-D''K)^2\varepsilon$, dove K è l'omotopia di cocatene definita nell'enunciato. Dato che $\xi_\beta - \xi_\alpha = d\varphi_{\alpha\beta}$ si ha $\delta\xi = d\varphi$, inoltre usando la relazione $\delta K + K\delta = id$ possiamo scegliere $\xi = \frac{1}{2\pi} K d\varphi$. Dalla costruzione della classe di Eulero segue che $\frac{1}{2\pi} \delta\varphi = -\varepsilon$, quindi applicando K

$$-K\varepsilon = \frac{\varphi}{2\pi} + \delta\omega, \quad \omega \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^0)$$

Quindi

$$\begin{aligned} (-D''K)^2\varepsilon &= -dKdK\varepsilon = dKd\left(\frac{\varphi}{2\pi} + \delta\omega\right) \\ &= dKd\frac{\varphi}{2\pi} + dKd\delta\omega \\ &= d\xi + dKd\delta\omega \end{aligned}$$

D'altra parte

$$dKd\delta\omega = dK\delta d\omega = d(id - \delta K)d\omega = -\delta dKd\omega$$

La forma $Kd\omega$ è definita globalmente, quindi $dKd\omega$ è una forma esatta globale e appartiene al nucleo di δ . Allora

$$(-D''K)^2\varepsilon = d\xi$$

cioè le due definizioni date per la classe di Eulero sono equivalenti.

Descriviamo adesso la classe di Eulero in termini delle funzioni di transizione del fibrato. Dal momento che questo è orientabile le funzioni $g_{\alpha\beta}$ hanno valori in $SO(2)$, che identifichiamo con la circonferenza unitaria complessa tramite la mappa

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta}$$

In particolare possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}$ come a funzioni a valori complessi. Tramite questa identificazione l'angolo di rotazione dal sistema di coordinate di $\pi^{-1}U_\beta$ a quello di $\pi^{-1}U_\alpha$ è

$$\pi^*d\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{i}\pi^*\log g_{\alpha\beta}$$

Dato che π ha differenziale di rango massimo il pullback π^* è iniettivo sulle forme, quindi

$$d\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{i}\log g_{\alpha\beta}$$

Sia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ una partizione dell'unità relativa a \mathcal{U} , scegliendo

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} \rho_\gamma d\varphi_{\gamma\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma} \rho_\gamma d\log g_{\gamma\alpha}$$

si ha che la restrizione di $e(E)$ a U_α è data da

$$(2.1) \quad e(E)|_{U_\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d(\rho_\gamma d\log g_{\gamma\alpha})$$

Sia $f : N \rightarrow M$ una mappa tra varietà, dal fatto che le funzioni di transizione di $f^{-1}E$ sono $g_{\alpha\beta} \circ f = f^*g_{\alpha\beta}$ si ha il seguente risultato.

Teorema 2.19. *Siano $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $f : N \rightarrow M$ una mappa tra varietà. Vale che $e(f^{-1}E) = f^*e(E)$*

Esempio 2.20. Consideriamo la retta proiettiva complessa \mathbb{CP}^1 costituita dall'insieme delle rette per l'origine di \mathbb{C}^2 , sia $S = \{(\ell, v) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}$. La proiezione $\pi : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ tale che $\pi(\ell, v) = \ell$ è un fibrato vettoriale (reale) di rango 2 su \mathbb{CP}^1 , detto *fibrato universale*. Vediamo che la classe di Eulero $e(S)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^1)$.

Consideriamo le coordinate omogenee $[z_0, z_1]$ su \mathbb{CP}^1 e gli aperti del ricoprimento standard $U_0 = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ e $U_1 = \{[z_0, z_1] \mid z_1 \neq 0\}$. Le mappe

$$\phi_0 : \pi^{-1}U_0 \rightarrow U_0 \times \mathbb{C}, \quad \phi_1 : \pi^{-1}U_1 \rightarrow U_1 \times \mathbb{C}$$

tali che $\phi_0(\ell, (v, w)) = (\ell, v)$ e $\phi_1(\ell, (v, w)) = (\ell, w)$ danno una trivializzazione del fibrato. Calcoliamo la funzione di transizione. Siano $[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1$ e $w \in \mathbb{C}$, esiste un unico $v \in \mathbb{C}$ tale che (v, w) è un punto della retta identificata da $[z_0, z_1]$

$$\begin{aligned} g_{01}([z_0, z_1])(w) &= (\phi_0 \circ \phi_1^{-1})|_{[z_0, z_1] \times \mathbb{C}}(w) = \phi_0(\phi_1^{-1}([z_0, z_1], w)) \\ &= \phi_0([z_0, z_1], (v, w)) = ([z_0, z_1], v) \end{aligned}$$

D'altra parte $\frac{v}{w} = \frac{z_0}{z_1}$ e di conseguenza $v = \frac{z_0}{z_1}w$, quindi $g_{01}([z_0, z_1])$ è la moltiplicazione per $\frac{z_0}{z_1}$.

Per vedere che $e(S)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^1)$ è sufficiente mostrare che il suo integrale è 1. Dal momento che $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup \{[1, 0]\}$ si ha

$$\int_{\mathbb{CP}^1} e(S) = \int_{U_1} e(S)$$

Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$ tale che ρ_0 è costantemente 1 intorno all'origine di $U_0 \cong \mathbb{C}$, identifichiamo U_1 con \mathbb{C} con la coordinata $z = \frac{z_0}{z_1}$. Usiamo la Formula 2.1 per la classe di Eulero:

$$\int_{U_1} e(S) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} d(\rho_0 d \log z) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_r} d(\rho_0 d \log z)$$

dove A_r è la corona circolare di raggio minore r e di raggio maggiore R tale che la palla aperta $B_R(0)$ centrata in 0 di raggio R contiene il supporto di ρ_0 . Per il Teorema di Stokes ([Teorema 1.27])

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_r} d(\rho_0 d \log z) = \lim_{r \rightarrow 0} - \int_{\partial B_r(0)} d \left(\rho_0 \frac{dz}{z} \right) = -2\pi i$$

Quindi $e(S)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^1)$.

2.4 Coomologia di Čech a coefficienti in un prefascio

Generalizziamo la costruzione della coomologia di Čech, ammettendo dei coefficienti più generali delle forme differenziali Ω^* .

Definizione 2.21. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio* \mathcal{F} su X è un funtore controvariante dalla categoria degli aperti di X , i cui morfismi sono le inclusioni, alla categoria dei gruppi abeliani. Un *omomorfismo* tra due prefasci \mathcal{F} e \mathcal{G} è una trasformazione naturale tra i due.

Osservazione 2.22. Il funtore Ω^* che a ogni aperto associa l'insieme delle forme differenziali su quell'aperto è un esempio di prefascio.

Sia \mathcal{F} un prefascio su uno spazio topologico X , diciamo che \mathcal{F} è il *prefascio banale* con gruppo G se per ogni $U \subseteq X$ aperto connesso vale $\mathcal{F}(U) = G$ e se per ogni inclusione di aperti $V \subseteq W$ la mappa $\mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ è l'identità. Diciamo che \mathcal{F} è un *prefascio costante* se è isomorfo al prefascio banale, che è *localmente costante* se ogni punto di X ammette un intorno U tale che $\mathcal{F}|_U$ è costante.

Consideriamo X uno spazio topologico avente ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, dove I è un insieme numerabile e totalmente ordinato, le *p -cocatene a coefficienti in \mathcal{F}* sono gli elementi di

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

Come nel caso delle forme differenziali definiamo l'operatore

$$\delta : \prod \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}})$$

tale che

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

Si ha $\delta^2 = 0$ (la dimostrazione è analoga a quella di [BT82, Proposizione 8.3]), quindi $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un complesso di cocatene con differenziale δ . Gli elementi del nucleo di δ sono i δ -cocicli, gli elementi dell'immagine i δ -cobordi. La coomologia $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ del complesso si dice *coomologia di Čech del ricoprimento \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{F}* .

Consideriamo un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ di \mathcal{U} , cioè un ricoprimento aperto per cui esiste una *mappa di raffinamento* $\phi : J \rightarrow I$ tale che $V_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$. La mappa di raffinamento ϕ induce una mappa tra i complessi $\phi^\# : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ tale che

$$(\phi^\#\omega)_{\beta_0 \dots \beta_p} = \omega_{\phi(\beta_0) \dots \phi(\beta_p)}$$

La mappa indotta $\phi^\#$ commuta con δ ([BT82, Lemma 10.4.1]), quindi induce una mappa in coomologia. Inoltre se $\psi : J \rightarrow I$ è un'altra mappa di raffinamento allora esiste un'omotopia di cocatene tra $\phi^\#$ e $\psi^\#$ ([BT82, Lemma 10.4.2]). Di conseguenza le mappe ϕ e ψ coincidono in coomologia. Usiamo questo fatto per definire dei gruppi di coomologia che siano indipendenti dalla scelta del ricoprimento.

Definizione 2.23. Un *sistema diretto di gruppi* è una famiglia $\{G_i\}_{i \in I}$ di gruppi, dove I è un insieme diretto, tale che per ogni coppia $a < b$ esiste un omomorfismo di gruppi $\varphi_{ab} : G_a \rightarrow G_b$ per cui valgono:

- (i) $\varphi_{aa} = id_{G_a}$;
- (ii) $\varphi_{ac} = \varphi_{bc} \circ \varphi_{ab}$ per $a < b < c$.

Definizione 2.24. Consideriamo un sistema diretto di gruppi $\{G_i\}_{i \in I}$ con omomorfismi $\varphi_{ab} : G_a \rightarrow G_b$. Il *limite diretto* del sistema diretto è il gruppo

$$\varinjlim G_i = \bigsqcup_{i \in I} G_i / \sim$$

secondo la seguente relazione \sim : due elementi $g_a \in G_a$ e $g_b \in G_b$ sono equivalenti se e solo se esiste $c \in I$ tale che $\varphi_{ac}(g_a) = \varphi_{bc}(g_b)$ in G_c .

Le mappe $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ indotte dalle mappe di raffinamento danno una struttura di sistema diretto di gruppi su $\{\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}_{\mathcal{U} \in \Lambda}$, dove Λ è l'insieme dei ricoprimenti aperti numerabili di X con l'ordinamento dato dal raffinamento. Definiamo la *coomologia di Čech* di X come il limite diretto

$$\check{H}^*(X, \mathcal{F}) = \varinjlim H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Questa costruzione generalizza la coomologia di Čech relativa a un buon ricoprimento che avevamo visto in precedenza.

Proposizione 2.25. Sia \mathcal{F} il prefascio costante con gruppo \mathbb{R} su una varietà M . La coomologia di Čech $\check{H}^*(M, \mathcal{F})$ e la coomologia di de Rham $H_{dR}^*(M)$ sono isomorfe.

Dimostrazione. Dal momento che i buoni ricoprimenti sono cofinali nell'insieme dei ricoprimenti aperti di M , possiamo considerare il limite diretto sull'insieme dei buoni ricoprimenti di M per il calcolo di $\check{H}^*(M, \mathbb{R})$. Per un buon ricoprimento \mathcal{U} si ha $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^*(M)$ per il Teorema 2.7, quindi $\check{H}^*(M, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^*(M)$. \square

2.5 L'isomorfismo di Thom

Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n , possiamo mettere in relazione la coomologia a supporto compatto in verticale di E con la coomologia di Čech di M usando opportuni coefficienti. Specializzando questo risultato al caso di un fibrato vettoriale orientato determiniamo una classe di coomologia, la *classe di Thom*, attraverso la quale deduciamo alcune proprietà della classe di Eulero.

Siano $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento di M , costruiamo un doppio complesso usando le forme a supporto compatto in verticale.

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow \Omega_{cv}^2(E) \xrightarrow{r} \prod \Omega_{cv}^2(\pi^{-1}U_\alpha) \quad \prod \Omega_{cv}^2(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1}) \quad \prod \Omega_{cv}^2(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\ 0 \longrightarrow \Omega_{cv}^1(E) \xrightarrow{r} \prod \Omega_{cv}^1(\pi^{-1}U_\alpha) \quad \prod \Omega_{cv}^1(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1}) \quad \prod \Omega_{cv}^1(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\ 0 \longrightarrow \Omega_{cv}^0(E) \xrightarrow{r} \prod \Omega_{cv}^0(\pi^{-1}U_\alpha) \quad \prod \Omega_{cv}^0(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1}) \quad \prod \Omega_{cv}^0(\pi^{-1}U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \end{array}$$

Con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.2 si ha che le righe di questo complesso sono esatte, quindi

$$H_{cv}^*(E) \cong H_D^*\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\}$$

Calcoliamo adesso $H_\delta^{*,*}\{H_d^{*,*}\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\}\}$.

$$\begin{aligned} H_d^{p,q}\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\} &= H_{cv}^q\left(\bigsqcup \pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}\right) \\ &= \prod H_{cv}^q(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) = C^p(U, \mathcal{H}_{cv}^q) \end{aligned}$$

dove \mathcal{H}_{cv}^q è il prefascio definito da $\mathcal{H}_{cv}^q(U) = H_{cv}^q(\pi^{-1}U)$. Per il Lemma 1.40, se U è diffeomorfo a \mathbb{R}^n allora $\mathcal{H}_{cv}^q(U) = \mathbb{R}$ se $q = n$ ed è nullo altrimenti. Di conseguenza $H_d^{p,q}\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\}$ e $H_\delta^{p,q}\{H_d^{*,*}\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\}\} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{cv}^q)$ hanno tutte le righe nulle eccetto per la riga n -esima.

Proposizione 2.26. *Sia K un doppio complesso con differenziale orizzontale δ e differenziale verticale d . Se $H_\delta^{*,*}\{H_d^{*,*}\{K\}\}$ ha solo una riga non nulla allora le coomologie $H_\delta H_d$ e H_D sono isomorfe, cioè per ogni n*

$$H_D^n\{K\} = \bigoplus_{p+q=n} H_\delta^{p,q}\{H_d^{*,*}\{K\}\}$$

Usiamo questo risultato, che viene dimostrato in [BT82, Proposizione 12.1], per mostrare l'isomorfismo di Thom.

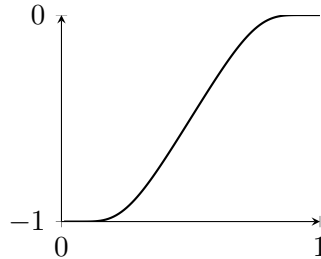
Teorema 2.27. *Siano $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n e \mathcal{U} un buon ricoprimento di M , si ha un isomorfismo $H_{cv}^*(E) \cong \check{H}^{*-n}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{cv}^n)$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.26 si ha

$$H_D^*\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\} = \bigoplus_{p+q=*} \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{cv}^q) = \check{H}^{*-n}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{cv}^n)$$

da cui la tesi in quanto $H_{cv}^*(E) = H_D^*\{C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)\}$. \square

Supponiamo adesso che $\pi : E \rightarrow M$ sia un fibrato vettoriale orientabile di rango n . Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento di M , esistono delle forme σ_α che generano la coomologia di $S(E)|_{U_\alpha}$ e tali che $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Dotando E di una metrica Riemanniana possiamo definire una funzione "raggio" r , che si estende a una funzione su tutto E . Scegliamo $\rho(r)$ una funzione liscia negativa tale che $\rho(0) = -1$, $\rho(1) = 0$ e che sia costante in un intorno di 0 e di 1, ad esempio quella in figura.



Usiamo ρ per ricavare una forma su E a partire dalle forme σ_α . Identificando $S(E)$ con E^0 possiamo pensare a σ_α come a una forma definita su $E^0|_{U_\alpha}$, quindi $(d\rho)\sigma_{\alpha \in \mathbb{N}}$ è una forma su $E|_{U_\alpha}$. Dalla condizione di orientabilità segue che $[(d\rho)\sigma_\alpha] = [(d\rho)\sigma_\beta]$ su $U_\alpha \cap U_\beta$, quindi le forme $\{(d\rho)\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ definiscono una forma globale $\Phi \in \Omega_{cv}^n(E)$. La classe di coomologia di Φ è detta *classe di Thom* di E . Dal momento che la coomologia delle fibre di E^0 è nulla in grado minore di n si ha che $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ si estende a un D -cociclo, quindi Φ è chiusa.

Teorema 2.28. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientabile di rango n . La mappa $\pi_* : H_{cv}^*(E) \rightarrow H^{*-n}(M)$ indotta dall'integrazione lungo le fibre è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un buon ricoprimento di M , dato che $\pi : E \rightarrow M$ è un fibrato vettoriale $\pi^{-1}\mathcal{U}$ è un buon ricoprimento di E . Per la Proposizione 1.40 π_* induce un isomorfismo

$$H_d^{p,q}(C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*)) = \prod H_{cv}^q(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \xrightarrow{\pi_*} \prod H^{q-n}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) = H_d^{p,q-n}(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$$

Per il Lemma 2.9 π_* induce un isomorfismo tra $H_D^*(C^*(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega_{cv}^*))$ e $H_D^{*-n}(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*))$, quindi tra $H_{cv}^*(E)$ e $H^{*-n}(M)$. \square

Lemma 2.29. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientabile di rango n . Il prefascio \mathcal{H}_{cv}^n è isomorfo al prefascio banale con gruppo \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Per ogni aperto U di M la classe di Thom di E si restringe a un generatore di $\mathcal{H}_{cv}^n(U)$ per il Lemma 1.40. Inoltre se V è un aperto contenuto in U la mappa indotta dall'inclusione fa corrispondere $\Phi|_U$ e $\Phi|_V$. In particolare la mappa che a $\Phi|_U$ associa 1 come generatore di \mathbb{R} induce un isomorfismo tra il prefascio \mathcal{H}_{cv}^n e il prefascio banale con gruppo \mathbb{R} . \square

Possiamo riformulare l'isomorfismo di Thom nel caso di un fibrato orientabile:

$$H_{cv}^m(E) = \check{H}^{m-n}(\mathcal{U}, \mathcal{H}_{cv}^n) = \check{H}^{m-n}(\mathcal{U}, \mathbb{R}) = H^{m-n}(M)$$

Dalla costruzione data segue che la classe di Thom è l'unica classe di $H^*(E)$ che si restringe a un generatore della coomologia di ogni fibra. Con questa caratterizzazione è possibile mostrare i prossimi due risultati, la cui dimostrazione si può trovare in [BT82, Proposizione 6.19] e [BT82, Proposizione 12.3] rispettivamente. Questi ci permettono di stabilire un collegamento tra la classe di Thom e la classe di Eulero.

Proposizione 2.30. *Siano $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ due fibrati vettoriali orientati. La classe di Thom di $E_1 \oplus E_2$ è $\Phi(E_1 \oplus E_2) = \pi_1^*\Phi(E_1) \wedge \pi_2^*\Phi(E_2)$.*

Proposizione 2.31. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale orientabile di rango n , consideriamo ρ come sopra e $\psi \in \Omega^{n-1}(E^0)$ la forma angolare. La classe di coomologia della forma*

$$\Phi = d(\rho\psi) = (d\rho)\psi + \rho d\psi \in \Omega_{cv}^n(E)$$

è la classe di Thom di E .

Consideriamo adesso la sezione nulla $s : M \rightarrow E$, per costruzione di ρ si ha $s^*d\rho = 0$ e $s^*\rho = -1$ quindi

$$s^*\Phi = (s^*\rho)d\psi = \pi^*e(E)$$

dato che $d\psi = -\pi^*e(E)$. Ricaviamo adesso la formula di Whitney per la classe di Eulero.

Teorema 2.32. *Siano $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ due fibrati vettoriali orientati. La classe di Eulero di $E_1 \oplus E_2$ è $e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1) \wedge e(E_2)$.*

Dimostrazione. Sia $s : M \rightarrow E_1 \oplus E_2$ la sezione nulla, abbiamo visto che

$$e(E_1 \oplus E_2) = s^*\Phi(E_1 \oplus E_2)$$

Per la Proposizione 2.30 vale che $\Phi(E_1 \oplus E_2) = \pi_1^*\Phi(E_1) \wedge \pi_2^*\Phi(E_2)$. Dato che $\pi_1 \circ s$ e $\pi_2 \circ s$ sono rispettivamente le sezioni nulle $s_1 : M \rightarrow E_1$ e $s_2 : M \rightarrow E_2$ si ha

$$e(E_1 \oplus E_2) = s^*\Phi(E_1 \oplus E_2) = s^*\pi_1^*\Phi(E_1) \wedge s^*\pi_2^*\Phi(E_2) = e(E_1) \wedge e(E_2)$$

□

Esempio 2.33. Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, i cui punti sono le rette di \mathbb{C}^{n+1} passanti per l'origine. Si ha in modo naturale un fibrato vettoriale reale di rango 2, detto *fibrato universale*:

$$S_n = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell\}$$

Pensiamo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ identificandolo con il sottoinsieme

$$\{[z_0, \dots, z_n] \mid z_2 = \dots = z_n = 0\}$$

È un fatto noto di topologia algebrica che questa inclusione $i : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ induce un isomorfismo $i^* : H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$ tra i *gruppi di coomologia singolare* a coefficienti in \mathbb{Z} (segue ad esempio da [Hat02, Lemma 2.34(c)] e da [Hat02, Teorema 3.5]). Vale inoltre che l'anello di coomologia singolare di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ con x generatore di $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ ([Hat02, Teorema 3.19]) e che la coomologia di de Rham è isomorfa alla coomologia singolare a coefficienti in \mathbb{R} ([Lee13, Teorema 18.14]).

Notiamo che il fibrato universale S_n è isomorfo al pullback tramite i del fibrato universale S_1 , quindi per naturalità della classe di Eulero vale che $e(S_n) = i^*e(S_1)$ genera $H_{dR}^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Segue che la coomologia di de Rham di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è

$$H_{dR}^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$$

dove x corrisponde a $e(S_n)$.

Capitolo 3

Classi di Chern

In questo capitolo diamo una definizione delle classi di Chern per un fibrato vettoriale complesso $\pi : E \rightarrow M$ ed esaminiamo alcune delle loro proprietà. A tale scopo introduciamo il Principio di Spezzamento, uno strumento che permette di studiare la coomologia di M sotto l'ipotesi che E sia una somma diretta di fibrati vettoriali di rango 1. In particolare lo utilizziamo per dimostrare la formula di Whitney per le classi di Chern. Concludiamo il capitolo esibendo una relazione tra il Principio di Spezzamento e il fibrato delle bandiere associato a E e ne calcoliamo la coomologia in termini delle classi di Chern di E . Facciamo riferimento principalmente a [BT82, § 20, 21] e [MS74, § 14]. Ulteriori referenze vengono date nel testo.

3.1 Definizione delle classi di Chern

Definizione 3.1. Un *fibrato vettoriale complesso* è un fibrato con fibra \mathbb{C}^n e gruppo di struttura $GL_n(\mathbb{C})$.

Osservazione 3.2. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale complesso, identificando \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} otteniamo un fibrato vettoriale reale $\pi_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \rightarrow M$. Dalla connessione per archi di $GL_n(\mathbb{C})$ ricaviamo che $E_{\mathbb{R}}$ è orientabile come fibrato vettoriale reale (una dimostrazione di questo fatto viene data in [MS74, Lemma 14.1]).

Osservazione 3.3. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale complesso di rango n , possiamo dotare E di una metrica Hermitiana e ridurre il gruppo di struttura del fibrato a $U(n)$. Sia $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento trivializzante per il fibrato, per ogni α esistono $s_{\alpha,1}, \dots, s_{\alpha,n}$ sezioni linearmente indipendenti per il fibrato $E|_{U_{\alpha}}$. Definiamo una funzione

$$q_{\alpha} : E|_{U_{\alpha}} \times E|_{U_{\alpha}} \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che $q_{\alpha}|_{E_p}$ sia una forma quadratica Hermitiana definita positiva per ogni p in M con base ortonormale $\{s_{\alpha,1}(p), \dots, s_{\alpha,n}(p)\}$. Questo definisce una metrica locale sul fibrato. Usando una partizione dell'unità $\{\rho_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ relativa a \mathcal{U} possiamo definire una metrica globale

$$q = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} q_{\alpha}$$

Scegliamo delle trivializzazioni locali ϕ_α che mandano sezioni ortonormali di $E|_{U_\alpha}$ in sezioni ortonormali di $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, ottenendo così delle funzioni di transizione a valori in $U(n)$.

Da ora in poi per *fibrato vettoriale* intenderemo sempre *fibrato vettoriale complesso*, a meno che non venga indicato diversamente.

Consideriamo inizialmente il caso di un fibrato vettoriale $\pi : L \rightarrow M$ di rango 1. Il fibrato vettoriale $L_{\mathbb{R}}$ è orientabile, di conseguenza ammette una classe di Eulero. Definiamo la *prima classe di Chern* di L come la classe di Eulero di $L_{\mathbb{R}}$: $c_1(L) = e(L_{\mathbb{R}})$. Questa è una classe di coomologia in $H^2(M)$.

Osservazione 3.4. Se L, L' sono fibrati vettoriali rango 1 su M allora anche il prodotto tensoriale $L \otimes L'$ ha rango 1. Sfruttando la Formula (2.1) che descrive la classe di Eulero in termini delle funzioni di transizione si ha

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$$

Se L' è il fibrato duale L^* , dall'isomorfismo tra $\text{Hom}(L, L)$ e $L \otimes L^*$ si ha

$$c_1(\text{Hom}(L, L)) = c_1(L) + c_1(L^*)$$

D'altra parte la funzione $s : L \rightarrow \text{Hom}(L, L)$ tale che $s(p)$ è l'identità di L_p è una sezione mai nulla, quindi il fibrato $\text{Hom}(L, L)$ è banale e la sua classe di Chern è nulla. Segue che $c_1(L) = -c_1(L^*)$.

Esempio 3.5 (Fibrato universale dello spazio proiettivo). Consideriamo il fibrato universale sullo spazio proiettivo complesso $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ come fibrato vettoriale complesso di rango 1. Poniamo $x = c_1(S^*)$, per quanto visto nell'Esempio 2.33 abbiamo una descrizione dell'anello di coomologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ in termini della classe di Chern di S :

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$$

Vediamo adesso il caso di un fibrato vettoriale di rango arbitrario.

Definizione 3.6. Sia $\rho : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale con ricoprimento trivializzante $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ e funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$. La sua *proiettivizzazione* è il fibrato $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$ la cui fibra su un punto p di M è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)_p = \mathbb{P}(E_p)$, con funzioni di transizione $\bar{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{P}GL_n(\mathbb{C})$ indotte dalle $g_{\alpha\beta}$. Un generico punto di $\mathbb{P}(E)$ è quindi una retta ℓ_p nello spazio vettoriale E_p .

Su $\mathbb{P}(E)$ possiamo definire tre fibrati in modo naturale: il pullback $\pi^{-1}E$, il fibrato universale $S = \{(\ell_p, v) \in \pi^{-1}E \mid v \in \ell_p\}$ e il fibrato quoziente Q , dato dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \pi^{-1}E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

In particolare la fibra di Q sopra a un punto p di M è E_p/ℓ_p e le sue funzioni di transizione sono indotte da quelle di $\pi^{-1}E$ per passaggio al quoziente. Se E ha rango n i fibrati S e Q hanno rango rispettivamente 1 e $n - 1$.

Definizione 3.7. La serie di Poincaré di una varietà M è la serie formale

$$P_t(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim H^i(M) t^i$$

Esempio 3.8. La serie di Poincaré dello spazio proiettivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è

$$P_t(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 1 + t^2 + \dots + t^{2n} = \frac{1 - t^{2(n+1)}}{1 - t^2}$$

Proposizione 3.9. Consideriamo $\rho : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n e il suo proiettivizzato $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$. Esistono uniche delle classi di coomologia $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ tali che

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = \frac{H^*(M)[x]}{(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E))}$$

Inoltre la serie di Poincaré di $\mathbb{P}(E)$ è

$$P_t(\mathbb{P}(E)) = P_t(M) \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}$$

Dimostrazione. Sia $x = e(S_{\mathbb{R}}^*)$, questa è una classe di coomologia di $H^2(\mathbb{P}(E))$. Dal momento che la restrizione di S a una fibra $\mathbb{P}(E)_p$ è isomorfa al fibrato universale \tilde{S} dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)_p$, per naturalità della classe di Eulero si ha $e(S_{\mathbb{R}}) |_{\mathbb{P}(E)_p} = e(\tilde{S}_{\mathbb{R}})$. Quindi la restrizione di x coincide con $e(\tilde{S}_{\mathbb{R}}^*)$, le cui potenze generano la coomologia di $\mathbb{P}(E)_p$ per ogni punto p di M ([Esempio 3.5]). Dal Teorema di Leray-Hirsch ([Teorema 1.38]) segue che $H^*(\mathbb{P}(E))$ è un $H^*(M)$ -modulo libero con base $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$. In particolare esistono unici dei coefficienti $c_i(E)$ nell'anello di coomologia di M tali che

$$x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E) = 0, \quad c_i(E) \in H^{2i}(M)$$

dove identifichiamo $H^*(M)$ con il sottoanello $\pi^*(H^*(M))$ di $H^*(\mathbb{P}(E))$. Dal Teorema di Leray-Hirsch segue infatti che π^* è un omomorfismo iniettivo.

La struttura dell'anello di coomologia di $\mathbb{P}(E)$ è data da

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = H^*(M) \otimes H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = \frac{H^*(M)[x]}{(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \dots + c_n(E))}$$

Dalla scrittura della coomologia di $\mathbb{P}(E)$ come prodotto tensoriale, ricaviamo che la serie di Poincaré di $\mathbb{P}(E)$ è

$$P_t(\mathbb{P}(E)) = P_t(M) \frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}$$

□

Definizione 3.10. Le classi $c_1(E), \dots, c_n(E)$ definite nella Proposizione 3.9 si dicono *classi di Chern* di E . Per $i > n$ definiamo $c_i(E) = 0$. La classe

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) \in H^*(M)$$

è la *classe di Chern totale*.

Osservazione 3.11. Nel caso di un fibrato vettoriale $\rho : L \rightarrow M$ di rango 1 abbiamo due definizioni per la prima classe di Chern, vediamo che queste effettivamente coincidono. Siano S il fibrato universale su $\pi : \mathbb{P}(L) \rightarrow L$ e $x = e(S_{\mathbb{R}}^*)$, è sufficiente verificare che valga la relazione

$$x + e(L_{\mathbb{R}}) = 0$$

Dato che L ha rango 1 vale $\mathbb{P}(L) = M$, di conseguenza $\pi^{-1}L$ e S coincidono con L . Quindi

$$x = e(S_{\mathbb{R}}^*) = -e(S_{\mathbb{R}}) = -e(L_{\mathbb{R}})$$

da cui la consistenza delle due definizioni di $c_1(L)$.

Osservazione 3.12. Se $E = M \times \mathbb{C}^n$ è il fibrato banale allora $\mathbb{P}(E) = M \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ e $\pi^{-1}E = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{C}^n$. In particolare $S = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{C}$ è banale e quindi $x = 0$. Allora le classi di Chern di E sono tutte nulle, cioè $c(E) = 1$.

3.2 Principio di Spezzamento

In questa sezione formuliamo il Principio di Spezzamento, che usiamo per dimostrare la Formula di Whitney: dati due fibrati vettoriali $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$, la classe di Chern $c(E_1 \oplus E_2)$ coincide con $c(E_1)c(E_2)$.

Iniziamo mostrando che le classi di Chern sono funtoriali rispetto alle mappe tra varietà.

Proposizione 3.13. *Siano $\rho : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $f : N \rightarrow M$ una mappa tra varietà. Allora $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$.*

Dimostrazione. Siano S_E il fibrato universale su $\mathbb{P}(E)$ e $x_E = c_1(S_E^*)$. Dato che il pullback $f^{-1}\mathbb{P}(E)$ e $\mathbb{P}(f^{-1}E)$ coincidono possiamo identificare $f^{-1}S_E$ e $S_{f^{-1}E}$. Dalla naturalità di x_E si ha inoltre

$$x_{f^{-1}E} = c_1(S_{f^{-1}E}^*) = c_1(f^{-1}S_E^*) = f^*c_1(S_E^*) = f^*x_E$$

Applicando f^* alla relazione che definisce le classi di Chern otteniamo

$$x_{f^{-1}E}^n + f^*c_1(E)x_{f^{-1}E}^{n-1} + \dots + f^*c_n(E) = 0$$

da cui $c_i(f^{-1}E) = f^*c_i(E)$ per $i = 1, \dots, n$ e quindi $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$. \square

Osservazione 3.14. Come corollario abbiamo che le classi di Chern sono invarianti per isomorfismo di fibrati vettoriali

Definizione 3.15. Sia $\rho : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n . Una *varietà di spezzamento* per M è una coppia $(F(E), \sigma)$ dove $F(E)$ è una varietà e $\sigma : F(E) \rightarrow M$ è una mappa per cui valgono le seguenti proprietà:

- il pullback $\sigma^{-1}E$ è una somma diretta $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ di fibrati di rango 1;
- la mappa indotta in coomologia $\sigma^* : H^*(M) \rightarrow H^*(F(E))$ è iniettiva.

L'esistenza di una tale coppia permette di ridurre lo studio di un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ di rango n a quello di n fibrati vettoriali di rango 1, almeno per quanto riguarda gli invarianti coomologici. Vedremo che in realtà vale un risultato più forte, cioè che dati E_1, \dots, E_r fibrati vettoriali su M esistono una varietà N e $\sigma : N \rightarrow M$ tali che tutti i pullback $\sigma^{-1}E_i = F_i$ sono somme dirette di fibrati di rango 1 e che $\sigma^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ è iniettiva. Assumendo che una tale coppia (N, σ) esista, dall'iniettività di σ^* deduciamo il seguente risultato.

Principio di Spezzamento. *Siano E_1, \dots, E_r fibrati vettoriali su una varietà M . Per mostrare un'identità polinomiale nelle classi di Chern di E_1, \dots, E_r è sufficiente mostrarla con l'ipotesi che E_1, \dots, E_r siano somme dirette di fibrati rango 1.*

Dimostrazione. Sia (N, σ) una varietà di spezzamento per i fibrati E_1, \dots, E_r e siano $F_i = \sigma^{-1}E_i$ per $i = 1, \dots, r$. Ogni F_i è una somma diretta di fibrati vettoriali di rango 1 e $\sigma^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ è iniettiva. Consideriamo un polinomio P tale che $P(c(F_1), \dots, c(F_r)) = 0$. Applicando σ^* si ha

$$\begin{aligned} \sigma^*P(c(E_1), \dots, c(E_r)) &= P(\sigma^*c(E_1), \dots, \sigma^*c(E_r)) \\ &= P(c(\sigma^{-1}E_1), \dots, c(\sigma^{-1}E_r)) = P(c(F_1), \dots, c(F_r)) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $P(c(E_1), \dots, c(E_r)) = 0$ perché σ^* è iniettiva. □

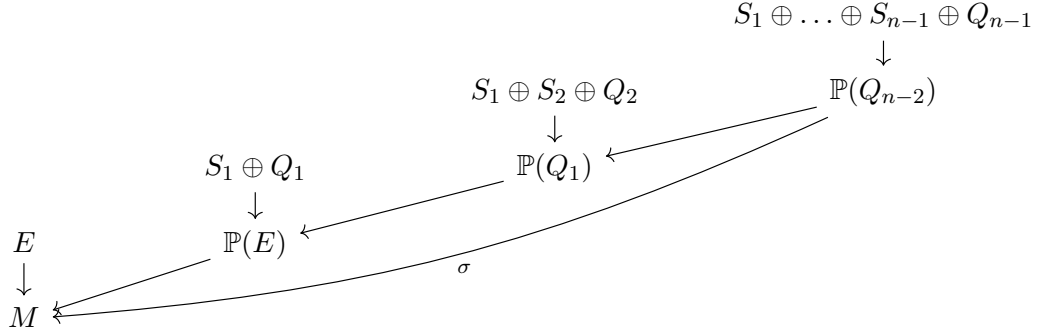
Per la costruzione di $F(E)$ sfruttiamo l'esistenza della successione

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow \pi^{-1}E \longrightarrow Q_1 \longrightarrow 0$$

di fibrati vettoriali su $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$, dove S_1 e Q_1 sono rispettivamente il fibrato universale e il fibrato quoziente. Dato che la successione è esatta si ha $\pi^{-1}E = S_1 \oplus Q_1$. Consideriamo quindi il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & S_1 \oplus Q_1 & \\ & \downarrow & \\ E & & \mathbb{P}(E) \\ \rho \downarrow & \swarrow \pi & \\ M & & \end{array}$$

dove S_1 è un fibrato di rango 1 e Q_1 di rango $n - 1$. Possiamo iterare questa costruzione su Q_1 ottenendo un fibrato $S_1 \oplus S_2 \oplus Q_2$ dove S_2 è il fibrato universale di $\mathbb{P}(Q_1)$ e Q_2 è il fibrato quoziente di $\mathbb{P}(Q_1)$. In particolare S_2 ha rango 1 e Q_2 ha rango $n - 2$. Procedendo in questo modo troviamo un pullback di E che si decompone in somma diretta di fibrati di rango 1:



La mappa indotta da σ in coomologia è iniettiva, infatti σ è data dalla composizione di fibrati che inducono mappe iniettive in coomologia per il Teorema di Leray-Hirsch. Posto quindi $F(E) = \mathbb{P}(Q_{n-2})$ si ha che $(F(E), \sigma)$ è una varietà di spezzamento per il fibrato $\rho : E \rightarrow M$. La costruzione si generalizza al caso di due o più fibrati E_1, \dots, E_r semplicemente ripetendo lo stesso ragionamento per ogni addendo diretto di $E_1 \oplus \dots \oplus E_r$.

Per la dimostrazione della formula di Whitney sono necessari due lemmi.

Lemma 3.16. *Siano X uno spazio topologico paracompatto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ localmente finito tale che $\bar{V}_i \subseteq U_i$ per ogni $i \in I$.*

Lemma 3.17. *Siano M una varietà e $C \subseteq M$ un sottoinsieme chiuso. Esiste una funzione liscia non negativa $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\rho^{-1}(0) = C$.*

Una dimostrazione di questi due fatti viene data rispettivamente in [Con93, Lemma 1.4.6] e in [Lee13, Teorema 2.29].

Teorema 3.18 (Formula di Whitney). *Siano $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrati vettoriali, allora $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$.*

Dimostrazione. Dal momento che $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$ è una relazione polinomiale nelle classi di Chern di E, F ed $E \oplus F$ possiamo supporre che E sia del tipo

$$E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n, \quad \text{rk} L_i = 1$$

Basta mostrare che $c(E) = c(L_1) \dots c(L_n)$. Consideriamo $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow E$ e $S \subseteq \pi^{-1}E$ il fibrato universale, il pullback di E è $\pi^{-1}E = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_n$ con $L'_i = \pi^{-1}L_i$ per $i = 1, \dots, n$. Anch'esso è somma diretta di fibrati vettoriali di rango 1. Per mostrare la tesi è sufficiente determinare un ricoprimento aperto finito $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ di $\mathbb{P}(E)$ e delle 2-forme chiuse $\eta_1, \dots, \eta_n \in \Omega^2(\mathbb{P}(E))$ tali che $[\eta_i] = c_1(S^* \otimes L'_i)$ e $\eta_i|_{V_i} = 0$ per $i = 1, \dots, n$. In tal caso infatti, posto $x = c_1(S^*)$, vale che

$$0 = \prod_{i=1}^n c_1(S^* \otimes L'_i) = \prod_{i=1}^n (x + c_1(L'_i)) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n$$

dove σ_i è l' i -esimo polinomio simmetrico elementare in $c_1(L'_1), \dots, c_1(L'_n)$. Identificando $H^*(M)$ con $\pi^*(H^*(M))$ utilizziamo le classi $c_1(L_i)$ al posto di $c_1(L'_i) = \pi^*c_1(L_i)$. Dalla definizione delle classi di Chern si ha $\sigma_i = c_i(E)$ per $i = 1, \dots, n$ e quindi l'uguaglianza

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(L_i)) = \prod_{i=1}^n c(L_i)$$

L'esistenza di un tale ricoprimento \mathcal{V} e di tali forme η_1, \dots, η_n dimostra quindi la formula di Whitney, ne diamo adesso una costruzione.

Per $i = 1, \dots, n$ consideriamo la proiezione $p_i : S \rightarrow L'_i$ di S sull' i -esimo addendo della somma diretta, questa induce una sezione s_i per $\text{Hom}(S, L'_i) = S^* \otimes L'_i$ su $\mathbb{P}(E)$. Le sezioni s_1, \dots, s_n non possono essere simultaneamente tutte nulle. Infatti dato $\ell \in \mathbb{P}(E)$, $s_i(\ell)$ è la proiezione di S_ℓ su $(L'_i)_\ell$ per $i = 1, \dots, n$. Dal momento che S_ℓ è un sottospazio di dimensione 1 di $(\pi^{-1}E)_\ell$, che si decompone come

$$(\pi^{-1}E)_\ell = (L'_1)_\ell \oplus \dots \oplus (L'_n)_\ell$$

se tali proiezioni fossero nulle allora S_ℓ sarebbe il sottospazio nullo, che è falso. Gli aperti $U_i = \{\ell \in \mathbb{P}(E) \mid s_i(\ell) \neq 0\}$ formano quindi un ricoprimento di $\mathbb{P}(E)$. In particolare il fibrato $(S^* \otimes L'_i)|_{U_i}$ è banale perché ha rango 1 e $s_i|_{U_i}$ ne è una sezione mai nulla. Se $\xi_i \in \Omega^2(\mathbb{P}(E))$ è una forma chiusa che rappresenta $c_1(S^* \otimes L'_i)$ allora $\xi_i|_{U_i} = d\omega_i$ per opportune 1-forme $\omega_i \in \Omega^1(U_i)$. Dato che le ω_i non sono forme globali, in generale $\xi|_{U_i} - d\omega_i$ non si estende a una forma su $\mathbb{P}(E)$.

Per i Lemmi 3.16 e 3.17 esistono $\mathcal{V} = \{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n\}$ un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}(E)$ e delle mappe $\rho_1, \dots, \rho_n : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\bar{V}_i \subseteq U_i$ e ρ_i è nulla su \bar{V}_i per ogni $i = 1, \dots, n$. A meno di sostituire ρ_i con $1 + \rho_i$ possiamo supporre che ρ_i valga costantemente 1 su \bar{V}_i . Estendiamo globalmente le forme $\xi_i - d\omega_i$ considerando

$$\eta_i = \xi_i - d(\rho_i \omega_i) \in \Omega^2(\mathbb{P}(E))$$

Continua a valere che $[\eta_i] = c_1(S^* \otimes L'_i)$ e $\eta|_{V_i} = 0$, e questo mostra la tesi per quanto già discusso. \square

Come corollario, in una successione esatta di fibrati vettoriali

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

vale che $c(B) = c(A)c(C)$. Questo permette il calcolo di alcune classi di Chern.

Esempio 3.19. Calcoliamo la classe di Chern totale del fibrato tangente T su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ usando la successione esatta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \hat{V} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

dove $\hat{V} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ è il fibrato banale, S è il fibrato universale e Q è il fibrato quoziente. Mostriamo che T è isomorfo al fibrato $\text{Hom}(S, Q)$. Consideriamo una metrica Hermitiana su \hat{V} , questa induce un isomorfismo tra i fibrati Q e S^\perp . Sia $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ la

proiezione canonica che a ogni punto $x \in S^{2n+1}$ associa la classe $\{\lambda x \mid \lambda \in S^1\}$. Fissato $x \in S^{2n+1}$ e v un vettore tangente a S^{2n+1} in x , i vettori tangenti $\{(\lambda x, \lambda v) \mid \lambda \in S^1\}$ vengono identificati dalla mappa $df : TS^{2n+1} \rightarrow T$ indotta da f sui fibrati tangenti. In particolare i punti di T corrispondono alle classi $\{(\lambda x, \lambda v) \mid \lambda \in S^1\}$ al variare delle coppie di vettori ortogonali $x, v \in \mathbb{C}^{n+1}$ con x di norma unitaria. Tali classi sono in bigezione con le mappe lineari $g : \ell \rightarrow \ell^\perp$ dove ℓ è la retta generata da x e $g(x) = v$. Questo determina un isomorfismo tra lo spazio tangente a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ in una retta ℓ e lo spazio vettoriale $\text{Hom}(\ell, \ell^\perp)$, quindi un isomorfismo di fibrati tra T e $\text{Hom}(S, S^\perp)$. Segue che

$$T = \text{Hom}(S, Q) = S^* \otimes Q$$

Tensorizzando per S^* la successione di sopra si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow S^* \otimes S \longrightarrow S^* \otimes \hat{V} \longrightarrow S^* \otimes Q \longrightarrow 0$$

Dato che S e S^* hanno rango 1 vale che $S^* \otimes S = \text{Hom}(S, S)$ è isomorfo al fibrato banale, quindi per l'Osservazione 3.12 si ha $c(S^* \otimes S) = 1$. D'altra parte possiamo vedere \hat{V} come somma diretta di fibrati banali di rango 1, da cui

$$S^* \otimes \hat{V} = (S^* \otimes (\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C})) \oplus \dots \oplus (S^* \otimes (\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}))$$

che è isomorfo a una somma diretta di $n + 1$ copie di S^* . La classe di Chern totale del fibrato tangente è quindi

$$c(T) = c(S^* \otimes \hat{V}) = c(S^*)^{n+1} = (1 + x)^{n+1}$$

dove $x = c_1(S^*)$.

3.3 Varietà delle bandiere

Studiamo ora la coomologia delle varietà delle bandiere, mettendole in relazione con la varietà di spezzamento di un fibrato. Questo sarà utile nel Capitolo 4 in quanto ci permetterà di calcolare l'anello di coomologia della Grassmanniana.

Definizione 3.20. Una *bandiera* di uno spazio vettoriale V di dimensione n è un insieme di sottospazi $\mathcal{F} = \{V_1, \dots, V_n\}$ tali che $\dim V_i = i$ per $i = 1, \dots, n$ e

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_n$$

Diciamo che una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è *adattata* alla bandiera $\mathcal{F} = \{V_1, \dots, V_n\}$ se \mathcal{F} coincide con la bandiera generata da \mathcal{B} . Più precisamente se $\text{Span}(v_1, \dots, v_i) = V_i$ per $i = 1, \dots, n$.

Siano V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e $Fl(V)$ l'insieme di tutte le bandiere di V . Scelta una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ possiamo identificare V con \mathbb{C}^n prendendo le coordinate rispetto a \mathcal{B} . Questo induce un'azione transitiva

$$Fl(V) \times GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Fl(V)$$

Sia \mathcal{F} la bandiera generata da \mathcal{B} , il suo stabilizzatore coincide con il sottogruppo H delle matrici triangolari superiori invertibili, quindi $Fl(V)$ è in bigezione con il quoziente $GL_n(\mathbb{C})/H$. Dal momento che questo è il quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo di Lie chiuso possiamo dotare $GL_n(\mathbb{C})/H$ di un'unica struttura di varietà ([Lee13, Teorema 21.17]). Di conseguenza anche $Fl(V)$ è una varietà, detta *varietà delle bandiere* di V . Possiamo fare una costruzione analoga per i fibrati vettoriali.

Definizione 3.21. Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale con ricoprimento trivializzante $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ e funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha \neq \beta}$. Il *fibrato delle bandiere* associato è il fibrato $\tilde{\pi} : Fl(E) \rightarrow M$ la cui fibra su un punto p di M è $Fl(E)_p = Fl(E_p)$, con funzioni di transizione $\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diffeo}(Fl(\mathbb{C}^n))$. Queste sono indotte dalle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ di E tramite l'azione di $GL_n(\mathbb{C})$ su $Fl(\mathbb{C}^n)$.

Proposizione 3.22. Sia $\rho : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Il fibrato delle bandiere $Fl(E)$ e la varietà di spezzamento $F(E)$ sono fibrati isomorfi.

Dimostrazione. Il fibrato $\sigma : F(E) \rightarrow M$ si ottiene tramite $n - 1$ proiettivizzazioni

$$\begin{array}{c}
 S_1 \oplus \dots \oplus S_{n-1} \oplus Q_{n-1} \\
 \downarrow \\
 S_1 \oplus S_2 \oplus Q_2 \qquad \mathbb{P}(Q_{n-2}) = F(E) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \\
 S_1 \oplus Q_1 \qquad \mathbb{P}(Q_1) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \\
 E \qquad \mathbb{P}(E) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \pi \\
 M
 \end{array}$$

Dotando $\pi^{-1}E$ di una metrica Hermitiana consideriamo Q_1, \dots, Q_{n-2} come sottofibrati di $\pi^{-1}E$ identificando ogni Q_i con $(S_1 \oplus \dots \oplus S_i)^\perp$. Se p è un punto di M , i punti di $\mathbb{P}(Q_{n-2})$ sopra a p sono della forma $(p, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ dove ℓ_1 è una retta in E_p e ℓ_i è una retta ortogonale a $\ell_1, \dots, \ell_{i-1}$ per $i = 2, \dots, n - 1$. In particolare l'insieme di rette $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ induce una bandiera di E_p

$$\ell_1 \subseteq \ell_1 \oplus \ell_2 \subseteq \dots \subseteq \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_{n-1} \subseteq E_p$$

Al variare dei punti nella fibra $\mathbb{P}(Q_{n-2})_p$ si ottengono quindi tutte le bandiere di E_p . Questo dà una bigezione $\Phi : F(E) \rightarrow Fl(E)$. Dato che tale corrispondenza preserva le fibre, il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc}
 F(E) & \xrightarrow{\Phi} & Fl(E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{id_M} & M
 \end{array}$$

e quindi Φ è un diffeomorfismo. □

Con questa caratterizzazione possiamo calcolare la coomologia del fibrato delle bandiere $Fl(E)$. Dalla costruzione di $\sigma : F(E) \rightarrow M$ si ricava che la coomologia $H^*(F(E))$ è un modulo libero su $H^*(M)$ con base

$$\{x_1^{a_1} \dots x_{n-1}^{a_{n-1}} \mid 0 \leq a_i \leq n-i, 1 \leq i \leq n-1\}$$

dove $\sigma^{-1}E = S_1 \oplus \dots \oplus S_{n-1} \oplus Q_{n-1}$ e $x_i = c_1(S_i^*)$. Per calcolare la sua struttura di anello diamo una descrizione alternativa di $H^*(\mathbb{P}(E))$. Scriviamo $H^*(M)[c(S), c(Q)]$ per indicare $H^*(M)[c_1(S), c_1(Q), \dots, c_{n-1}(Q)]$, dove S è il fibrato universale e Q è il fibrato quoziente su $\mathbb{P}(E)$.

Proposizione 3.23. *L'anello di coomologia di $\mathbb{P}(E)$ coincide con l'anello*

$$\frac{H^*(M)[c(S), c(Q)]}{(c(S)c(Q) - \pi^*c(E))}$$

Dimostrazione. Posti $x = c_1(S^*)$, $y_i = c_i(Q)$ e $c_i = \pi^*c_i(E)$, scriviamo la relazione $c(S)c(Q) = \pi^*c(E)$ come

$$(1-x)(1+y_1+\dots+y_{n-1}) = 1+c_1+\dots+c_n$$

Uguagliando i termini dello stesso grado otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y_1 - x = c_1 \\ y_2 - xy_1 = c_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} - xy_{n-2} = c_{n-1} \\ -xy_{n-1} = c_n \end{cases}$$

dal quale si ricava che y_1, \dots, y_{n-1} sono dei polinomi in x a coefficienti in $H^*(M)$. Di conseguenza l'anello

$$\frac{H^*(M)[c(S), c(Q)]}{(c(S)c(Q) - \pi^*c(E))}$$

è generato solo da x come algebra su $H^*(M)$. Moltiplicando la riga i -esima per x^{n-i} e sommando le righe del sistema così ottenute, si ricava la relazione

$$x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

Per unicità delle classi di Chern $c_i = c_i(E)$, quindi i due anelli sono isomorfi. \square

Descriviamo adesso la struttura di anello di $H^*(F(E))$.

Proposizione 3.24. *Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango n . Il fibrato delle bandiere $Fl(E)$ ha coomologia*

$$H^*(Fl(E)) = \frac{H^*(M)[x_1, \dots, x_n]}{((1+x_1)\dots(1+x_n) - c(E))}$$

e serie di Poincaré

$$P_t(Fl(E)) = P_t(M) \frac{(1-t^2)\dots(1-t^{2n})}{(1-t^2)\dots(1-t^2)}$$

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{c}
 S_1 \oplus \dots \oplus S_{n-1} \oplus Q_{n-1} \\
 \downarrow \\
 S_1 \oplus S_2 \oplus Q_2 \qquad \mathbb{P}(Q_{n-2}) = F(E) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \\
 S_1 \oplus Q_1 \qquad \mathbb{P}(Q_1) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \\
 E \qquad \mathbb{P}(E) \\
 \downarrow \qquad \swarrow \\
 M
 \end{array}$$

Dalla Proposizione 3.23 la coomologia di $\mathbb{P}(Q_1)$ è data da

$$\begin{aligned}
 H^*(\mathbb{P}(Q_1)) &= \frac{H^*(\mathbb{P}(E))[c(S_2), c(Q_2)]}{(c(S_2)c(Q_2) - c(Q_1))} \\
 &= \frac{H^*(M)[c(S_1), c(Q_1), c(S_2), c(Q_2)]}{(c(S_1)c(Q_1) - c(E), c(S_2)c(Q_2) - c(Q_1))} \\
 &= \frac{H^*(M)[c(S_1), c(S_2), c(Q_2)]}{(c(S_1)c(S_2)c(Q_2) - c(E))}
 \end{aligned}$$

In generale, posti $x_i = c_1(S_i)$ per $i = 1, \dots, n-1$ e $x_n = c_1(Q_{n-1})$, si mostra per induzione che

$$H^*(F(E)) = \frac{H^*(M)[x_1, \dots, x_n]}{((1+x_1) \dots (1+x_n) - c(E))}$$

Dal momento che $F(E)$ si ottiene tramite $n-1$ proiettivizzazioni, la sua serie di Poincaré è

$$P_t(F(E)) = P_t(M) \frac{(1-t^2) \dots (1-t^{2n})}{(1-t^2) \dots (1-t^2)}$$

□

Se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n , possiamo calcolare la coomologia di $Fl(V)$ considerando V come fibrato banale su un punto. In questo caso si ha

$$H^*(Fl(V)) = \frac{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]}{((1+x_1) \dots (1+x_n) - 1)}$$

mentre la serie di Poincaré di $Fl(V)$ è

$$P_t(Fl(V)) = \frac{(1-t^2) \dots (1-t^{2n})}{(1-t^2) \dots (1-t^2)}$$

Capitolo 4

Il Fibrato Universale

In quest'ultimo capitolo introduciamo la Grassmanniana complessa e mostriamo come questa sia strettamente legata al problema della classificazione dei fibrati vettoriali complessi su una varietà. Vediamo in particolare come questi possono essere ottenuti come pullback di un fibrato sulla Grassmanniana, che è quindi uno "spazio classificante". Mostriamo infine come le classi di Chern siano, in un certo senso, l'unico invariante coomologico per fibrati vettoriali complessi. Le referenze principali per questo capitolo sono [BT82, § 23] e [MS74, § 14].

4.1 La coomologia della Grassmanniana

Definizione 4.1. Siano V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e k un intero positivo. La *Grassmanniana* degli $(n - k)$ -piani di V è l'insieme $\mathcal{G}_k(V)$ dei sottospazi di V di codimensione k .

Consideriamo V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n dotato di una metrica Hermitiana e la Grassmanniana $\mathcal{G}_k(V)$. La scelta di una base \mathcal{B} di V induce un'azione transitiva di $U(n)$ sulla Grassmanniana

$$U(n) \times \mathcal{G}_k(V) \longrightarrow \mathcal{G}_k(V)$$

Lo stabilizzatore di un elemento Λ di $\mathcal{G}_k(V)$ è costituito da un sottogruppo di $U(n)$ isomorfo a $U(k) \times U(n - k)$. Infatti un elemento dello stabilizzatore ha come sottospazi invarianti sia Λ sia il suo supplementare ortogonale. Possiamo rappresentare quindi la Grassmanniana come quoziente di $U(n)$

$$\mathcal{G}_k(V) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n - k)}$$

Dal momento che questo è il quoziente di un gruppo di Lie per un suo sottogruppo di Lie chiuso possiamo dotare $\mathcal{G}_k(V)$ di un'unica struttura di varietà ([Lee13, Teorema 21.17]).

Sulla Grassmanniana possiamo definire tre fibrati vettoriali in modo naturale: il fibrato banale $\hat{V} = \mathcal{G}_k(V) \times V$, il fibrato universale

$$S = \{(\Lambda, v) \in \mathcal{G}_k(V) \times V \mid v \in \Lambda\}$$

e il fibrato quoziente Q , dato dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \hat{V} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Questi sono fibrati vettoriali di rango rispettivamente $n - k$, n e k .

Dalla discussione fatta sui fibrati delle bandiere riusciamo a calcolare la serie di Poincaré della Grassmanniana, che risulterà utile per determinarne la coomologia.

Proposizione 4.2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n . La serie di Poincaré della Grassmanniana $\mathcal{G}_k(V)$ è*

$$P_t(\mathcal{G}_k(V)) = \frac{(1 - t^2) \dots (1 - t^2)}{(1 - t^2) \dots (1 - t^{2k})(1 - t^2) \dots (1 - t^{2(n-k)})}$$

Dimostrazione. Siano S e Q rispettivamente il fibrato universale e il fibrato quoziente sulla Grassmanniana, consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \hat{Q} & F(\hat{Q}) \\ & \downarrow & \swarrow \\ Q & & F(S) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{G}_k(V) & & \end{array}$$

dove \hat{Q} è il pullback di Q sulla varietà di spezzamento $F(S)$. Sfruttiamo la caratterizzazione di $F(S)$ e $F(\hat{Q})$ come fibrati delle bandiere. I punti di $F(S)$ sono coppie del tipo (Λ, \mathcal{F}) , dove Λ è un elemento di $\mathcal{G}_k(V)$ e \mathcal{F} è una bandiera di Λ . I punti di $F(\hat{Q})$ quindi sono triple del tipo $(\Lambda, \mathcal{F}, \mathcal{F}')$, dove Λ è un elemento di $\mathcal{G}_k(V)$, $\mathcal{F} = \{V_1, \dots, V_{n-k}\}$ è una bandiera di Λ e \mathcal{F}' è una bandiera di V/Λ . Possiamo identificare quest'ultima con una successione di sottospazi

$$V_{n-k+1} \subseteq \dots \subseteq V_n$$

con $\dim V_{n-k+i} = n - k + i$ e $\Lambda \subseteq V_{n-k+1}$. In questo modo otteniamo una bandiera di V di cui Λ è un elemento. Questa corrispondenza dà un isomorfismo tra $F(\hat{Q})$ e la varietà delle bandiere $F(V)$. Dalla Proposizione 3.24 abbiamo la seguente relazione tra le serie di Poincaré di $F(V)$ e di $\mathcal{G}_k(V)$

$$P_t(F(V)) = P_t(\mathcal{G}_k(V)) \frac{(1 - t^2) \dots (1 - t^{2k})(1 - t^2) \dots (1 - t^{2(n-k)})}{(1 - t^2) \dots (1 - t^2)}$$

D'altra parte

$$P_t(F(V)) = \frac{(1 - t^2) \dots (1 - t^{2n})}{(1 - t^2) \dots (1 - t^2)}$$

da cui segue la tesi. □

Proposizione 4.3. *Siano V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e S , Q rispettivamente il fibrato universale e il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(V)$.*

(1) L'anello di coomologia della Grassmanniana è

$$H^*(\mathcal{G}_k(V)) = \frac{\mathbb{R}[c_1(S), \dots, c_{n-k}(S), c_1(Q), \dots, c_k(Q)]}{(c(S)c(Q) - 1)}$$

(2) Le classi di Chern $c_1(Q), \dots, c_k(Q)$ generano la coomologia di $\mathcal{G}_k(V)$.

(3) Fissati i, k interi positivi, per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande non esistono relazioni polinomiali di grado i tra le classi $c_1(Q), \dots, c_k(Q)$.

Dimostrazione. Dalla caratterizzazione di $F(V)$ data nella dimostrazione della Proposizione 4.2 troviamo che la coomologia di $F(V)$ è

$$H^*(F(V)) = \frac{H^*(\mathcal{G}_k(V))[x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k]}{((1+x_1) \dots (1+x_{n-k}) - c(S), (1+y_1) \dots (1+y_k) - c(Q))}$$

D'altra parte per la Proposizione 3.24 sappiamo che

$$H^*(F(V)) = \frac{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k]}{((1+x_1) \dots (1+x_{n-k})(1+y_1) \dots (1+y_k) - 1)}$$

Quindi l'unica relazione nella coomologia di $\mathcal{G}_k(V)$ tra le classi di Chern di S e Q è $c(S)c(Q) = 1$. Esiste quindi un omomorfismo di algebre iniettivo

$$\Phi : \frac{\mathbb{R}[c_1(S), \dots, c_{n-k}(S), c_1(Q), \dots, c_k(Q)]}{(c(S)c(Q) - 1)} \longrightarrow H^*(\mathcal{G}_k(V))$$

Questo è in realtà un isomorfismo, in quanto le serie di Poincaré delle due algebre coincidono ([BT82, Proposizioni 23.4, 23.7]), da cui segue (1).

Dalla relazione $c(S)c(Q) = 1$ otteniamo $n - k$ relazioni che permettono di eliminare $c_1(S), \dots, c_{n-k}(S)$ dai generatori di $H^*(\mathcal{G}_k(V))$, che mostra (2). Questa fornisce inoltre delle relazioni polinomiali tra $c_1(Q), \dots, c_k(Q)$ di gradi $2(n - k + 1), \dots, 2n$. Quindi, fissato un intero positivo i , se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $2(n - k + 1) > i$ allora non esistono relazioni polinomiali di grado i tra le classi di Chern di Q , dai cui il punto (3). \square

Esempio 4.4. Consideriamo la Grassmanniana $\mathcal{G}_2(\mathbb{C}^4)$, per quanto appena dimostrato vale

$$H^*(\mathcal{G}_2(\mathbb{C}^4)) = \frac{\mathbb{R}[c_1(S), c_2(S), c_1(Q), c_2(Q)]}{(c(S)c(Q) - 1)}$$

Esplicitiamo la relazione $c(S)c(Q) = 1$ per eliminare $c_1(S)$ e $c_2(S)$ dai generatori. Separando i termini per grado si ha

$$\begin{cases} c_1(S) + c_1(Q) = 0 \\ c_1(S)c_1(Q) + c_2(S) + c_2(Q) = 0 \\ c_1(S)c_2(Q) + c_2(S)c_1(Q) = 0 \\ c_2(S)c_2(Q) = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni troviamo $c_1(S) = -c_1(Q)$ e $c_2(S) = c_1(Q)^2 - c_2(Q)$, mentre le altre due danno relazioni polinomiali di grado 6 e 8 tra $c_1(Q)$ e $c_2(Q)$.

4.2 Classificazione di fibrati vettoriali

Mostriamo che le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali su una varietà M sono in corrispondenza con le classi di omotopia delle mappe da M nella Grassmanniana. In particolare vediamo che ogni fibrato vettoriale su M è un pullback del fibrato quoziente sulla Grassmanniana. Studiamo inizialmente il caso di varietà di tipo finito, cioè con un buon ricoprimento finito e accenniamo in seguito al caso generale.

Lemma 4.5. *Siano M una varietà di tipo finito, $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango k . Esiste un insieme finito di sezioni del fibrato che genera la fibra E_p sopra a ogni punto p di M .*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un buon ricoprimento finito di M , dal momento che U_i è contraibile si ha che $E|_{U_i}$ è il fibrato banale su U_i . Esistono quindi k sezioni $s_{i,1}, \dots, s_{i,k}$ linearmente indipendenti su U_i per il fibrato $E|_{U_i}$. In particolare queste danno una base per le fibre di E sopra ai punti di U_i . Per il Lemma 3.16 esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ tale che $\bar{V}_i \subseteq U_i$ per ogni $i \in I$. Inoltre per il Lemma 3.17 esistono delle mappe $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\rho_i^{-1}(0) = M \setminus U_i$ per ogni $i \in I$. L'insieme $\{\rho_i s_{i,1}, \dots, \rho_i s_{i,k}\}_{i \in I}$ è quindi costituito da sezioni del fibrato che per ogni punto p di M generano la fibra E_p . \square

Osservazione 4.6. Siano M è una varietà con un buon ricoprimento costituito da r aperti e k è un intero positivo. Per ogni fibrato di rango k esistono almeno rk sezioni che generano la fibra su ogni punto, e la costruzione di queste non dipende dalla classe di isomorfismo del fibrato.

Proposizione 4.7. *Siano M una varietà di tipo finito e k un intero positivo. Per n sufficientemente grande ogni fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ di rango k ammette una mappa $f : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$, dove Q è il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$.*

Dimostrazione. Siano s_1, \dots, s_n sezioni del fibrato che generano le fibre sopra a ogni punto di M , per l'Osservazione 4.6 l'intero n dipende solo da M . Siano $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango k e V lo spazio vettoriale complesso avente per base s_1, \dots, s_n . Prendendo le coordinate rispetto a questa base identifichiamo V con \mathbb{C}^n e $\mathcal{G}_k(V)$ con $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$. Per ogni $p \in M$ abbiamo una mappa di valutazione surgettiva

$$\text{ev}_p : \mathbb{C}^n \rightarrow E_p$$

ottenuta estendendo per linearità la valutazione delle sezioni. Notiamo che il nucleo di ev_p ha codimensione k e $\mathbb{C}^n / \ker \text{ev}_p = E_p$ è la fibra del fibrato quoziente Q sopra a $\ker \text{ev}_p \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$. Consideriamo quindi la funzione

$$f : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$$

tale che $f(p) = \ker \text{ev}_p$, il pullback del fibrato quoziente Q coincide con E per definizione di f . \square

La mappa $f : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ costruita sopra si dice *mappa classificante* per il fibrato $\pi : E \rightarrow M$. L'esistenza di una tale mappa permette di definire una funzione surgettiva

$$\alpha : [M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)] \rightarrow \text{Vect}_k(M, \mathbb{C})$$

per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Indichiamo con $\text{Vect}_k(M; \mathbb{C})$ le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi su M e con $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)]$ le classi di omotopia di mappe da M a valori in $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$. Dal seguente lemma, la cui dimostrazione viene data in [Hus94, § 8.7, Teorema 7.2], deduciamo che la classe di omotopia della mappa classificante è univocamente determinata dalla classe di isomorfismo del fibrato per n sufficientemente grande.

Lemma 4.8. *Sia M una varietà di dimensione m . Se $f, g : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ sono mappe tali che $f^{-1}Q \cong g^{-1}Q$ sono fibrati isomorfi e $n \geq k + \frac{m}{2}$ allora f e g sono omotope.*

Quindi se $n \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande la mappa α è anche iniettiva, quindi dà una corrispondenza biunivoca.

Teorema 4.9. *Siano M una varietà di tipo finito e k un intero positivo. Per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande esiste una corrispondenza biunivoca tra $\text{Vect}_k(M; \mathbb{C})$ e $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)]$.*

Concludiamo mostrando che in un certo senso le classi di Chern sono gli unici invarianti coomologici di un fibrato vettoriale.

Teorema 4.10. *Ogni trasformazione naturale tra i funtori $\text{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C})$ e $H^*(\bullet)$ nella categoria delle varietà di tipo finito è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.*

Dimostrazione. Sia T una trasformazione naturale tra i due funtori e sia E un fibrato vettoriale di rango k su una varietà M di tipo finito. Consideriamo $f : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ una mappa classificante per il fibrato, cioè $E = f^{-1}Q$. Per naturalità di T si ha

$$T(E) = T(f^{-1}Q) = f^*T(Q)$$

Dato che la coomologia della Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ è generata dalle classi di Chern del fibrato quoziente ([Proposizione 4.3]), esiste un polinomio P_T tale che

$$T(Q) = P_T(c_1(Q), \dots, c_k(Q))$$

Applicando f^* quindi

$$T(E) = f^*T(Q) = P_T(f^*c_1(Q), \dots, f^*c_k(Q)) = P_T(c_1(E), \dots, c_k(E))$$

□

Per studiare il caso generale introduciamo la *Grassmanniana infinita*. Consideriamo l'inclusione $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ sulle prime n coordinate, questa induce un'inclusione tra le Grassmanniane $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$. Più precisamente, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di

\mathbb{C}^n , l'inclusione delle Grassmanniane è data dalla mappa $i : \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$ tale che $i(\Lambda) = \Lambda \oplus \text{Span}(e_{n+1})$. Definiamo la *Grassmanniana infinita* come l'unione

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$$

Questo coincide con l'insieme dei sottospazi di codimensione k contenuti nello spazio vettoriale \mathbb{C}^∞ delle successioni definitivamente nulle a valori in \mathbb{C} . Su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ consideriamo la *topologia debole*, per cui un sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è aperto se e solo se $A \cap \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ è aperto in $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ per ogni n .

Sia Q_n il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$, abbiamo un'inclusione $Q_n \subseteq Q_{n+1}$ indotta dalle inclusioni $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$. Con una costruzione analoga possiamo definire il fibrato quoziente Q su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$: questo è un fibrato vettoriale la cui fibra sopra a un punto Λ di $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^\infty/\Lambda$ di dimensione k .

In modo analogo a quanto già visto, mostriamo che i fibrati vettoriali di rango k su una varietà M sono in bigezione con $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)]$, generalizzando i risultati che richiedevano un ricoprimento finito al caso numerabile.

Come per il Lemma 4.5 si mostra che ogni fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow M$ di rango k ammette un insieme numerabile di sezioni $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che generano la fibra sopra a ogni punto di M . Considerando lo spazio vettoriale complesso V_∞ che ha per base $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possiamo ripercorrere la dimostrazione della Proposizione 4.7 per determinare una mappa classificante per il fibrato, cioè $f : M \rightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ tale che $E = f^{-1}Q$. Con le stesse argomentazioni del caso finito si ha il seguente risultato di classificazione.

Teorema 4.11. *Siano M una varietà e k un intero positivo. Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\text{Vect}_k(M; \mathbb{C})$ e $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)]$.*

Per quanto riguarda la coomologia della Grassmanniana infinita viene mostrato in [MS74, Teorema 14.5] che l'anello di coomologia di $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è

$$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)) = \mathbb{R}[c_1(Q), \dots, c_k(Q)]$$

Possiamo quindi generalizzare quanto visto nel Teorema 4.10 rimuovendo l'ipotesi di finitezza considerando la Grassmanniana $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ nella dimostrazione.

Teorema 4.12. *Ogni trasformazione naturale tra i funtori $\text{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C})$ e $H^*(\bullet)$ nella categoria delle varietà è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.*

Bibliografia

- [BT82] Raoul Bott and Loring W Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, vol. 82, Springer, 1982.
- [Con93] Lawrence Conlon, *Differentiable Manifolds: A First Course*, Springer Science & Business Media, 1993.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [HS71] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag New York, 1971.
- [Hus94] Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag New York, 1994.
- [Lee13] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer New York, 2013.
- [MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.